



UNITE DE RECHERCHE
IRIA-SOPHIA ANTIPOLIS

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 1005

Programme 7

UN SCHEMA DE VOLUMES-FINIS DECENTRE POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS D'EULER EN AXISYMETRIQUE

Aurélien GOUDJO
Jean-Antoine DESIDERI

Mars 1989



3054

**UN SCHEMA DE VOLUMES-FINIS DECENTRE
POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS
D'EULER EN AXISYMETRIQUE**

**AN UPWIND FINITE-VOLUME SCHEME
FOR THE SOLUTION OF THE
AXISYMMETRIC EULER EQUATIONS**

Aurélien GOUDJO
Jean-Antoine DESIDERI

INRIA
Centre de Sophia Antipolis
2004, Route des Lucioles
06560 VALBONNE

UN SCHEMA DE VOLUMES-FINIS DECENTRE POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS D'EULER EN AXISYMETRIQUE

Résumé

Dans cette étude on analyse une **formulation Volumes Finis d'un problème 3-D axisymétrique** régi par les équations d'EULER .

On a développé une technique, dite "technique de perturbation de domaine", qui fournit une approximation discrète comme la limite axisymétrique d'une approximation intégrale des équations en 3-D. Ainsi on est assuré de capturer la solution faible 3-D désirée.

Dans le cas des équations d'EULER , la technique de perturbation de domaine fait ressortir un terme de source qui est essentiellement un terme de pression .

La mise en oeuvre numérique fait appel à un solveur bidimensionnel où seuls les éléments géométriques , mesure de cellules , normales intégrées etc., gardent en mémoire le caractère 3-D du problème . Les résultats obtenus pour des écoulements sur un cône de révolution et une sphère confirment que la technique s'applique sans difficulté et reproduit des résultats théoriques connus.

AN UPWIND FINITE-VOLUME SCHEME FOR THE SOLUTION OF THE AXISYMMETRIC EULER EQUATIONS

Abstract

In this work, a 3-D axisymmetric Finite Volume formulation of the Euler equations is analyzed. A so-called "domain perturbation technique " is developed to provide a discrete approximation as the axisymmetric limit of an integral approximation of the 3-D equations. This approach insures capturing the correct 3-D weak solution. In the case of the Euler equations, the domain perturbation gives rise to a source term essentially involving pressure. The numerical implementation employs a modified 2-D code in which only geometrical elements (such as cell areas, integrated normals, etc...) contain the 3-D information. The results obtained for the inviscid flow over a cone and a sphere confirm that the technique applies straightforwardly and reproduces known theoretical results.

Table des Matières

I. INTRODUCTION	1
II. CONSTRUCTION DU SCHEMA	2
1. Préliminaires : notations	2
1.1. Domaine axisymétrique	2
1.2. Champs axisymétriques	2
2. Les équations d'EULER	4
3. Formulation de type Volumes Finis par perturbation de domaine	5
4. Evaluation d'une limite	8
5. Calcul des éléments géométriques	10
5.1. Calcul des normales intégrées	10
5.2. Calcul de la mesure d'une cellule	12
6. Une approximation d'ordre 1	12
6.1. A l'intérieur	12
6.2. Conditions aux bords	14
6.2.1. Condition de paroi	15
6.3. Condition sur l'axe de symétrie	15
7. Equation d'advection scalaire	16
7.1. Cas sans source : $\rho_t + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$	16
7.2. Cas avec source : $\rho_t + \text{div}(\rho \vec{V}) = \Phi(\rho, \dots)$	16
III. ANALYSE D'UN MODELE SIMPLIFIE	18
1. Formulation Volumes Finis	18
1.1. Equation équivalente	22
1.2. Analyse de Fourier	23
1.3. Dissipation et dispersion	25
1.4. Comportement du schéma au voisinage de l'axe de symétrie	26
IV. TESTS NUMERIQUES	32
1. Fluide parfait non réactif	32
1.1. Comparaison d'écoulements 2-D et axisymétrique	32
1.1.1. Choc attaché	32
1.1.2. Choc détaché	32
1.2. Application : jet supersonique dans une chambre de combustion	55
2. Ecoulement de gaz réactif à l'équilibre chimique	55
V. CONCLUSION	91
VI. REFERENCES	92
VII. ANNEXE	93

I. INTRODUCTION

La méthode classique, en différences finies, pour résoudre un problème axisymétrique, consiste à réécrire le système différentiel à résoudre (équations d'Euler + conditions aux limites) en coordonnées cylindriques, à effectuer les simplifications provenant de l'hypothèse d'écoulement axisymétrique, (en particulier $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$) et à discrétiser le système ainsi réduit à deux variables d'espace (x, y) .

Une telle approximation différences finies, en coordonnées cylindriques est un cas particulier d'approximation en coordonnées généralisées. Si l'approximation est consistante et stable, elle doit fournir la solution faible recherchée.

Dans la formulation de type volumes finis, on travaille directement en coordonnées cartésiennes, sans changement de variables. Alors une discrétisation quelconque du problème réduit en (x, y) n'apparaît pas nécessairement comme le cas particulier d'une approximation consistante et stable 3-D. Du moins, leur lien n'est plus évident, et le problème de la convergence vers la bonne solution faible se pose.

Dans cette étude, on a construit un schéma de Volumes Finis bien posé en 3-D dont on prend ensuite la limite dans l'hypothèse axisymétrique. On est ainsi assuré que le résultat axisymétrique est consistant avec la solution conservative 3-D.

II. CONSTRUCTION DU SCHEMA

1. Préliminaires : notations

Dans toute la suite E^3 sera l'espace physique rapporté à un repère de référence $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé . On notera \mathcal{P} le demi-plan (O, \vec{i}, \vec{j}^+) c'est à dire

$$\mathcal{P} = \{M \in E^3 \mid O\vec{M} = x\vec{i} + y\vec{j}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_+\}$$

1.1. Domaine axisymétrique

Soit \mathcal{Q} un domaine ouvert de E^3 et soit $\Omega = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$

\mathcal{Q} est axisymétrique d'axe (O, \vec{i}) si et seulement si \mathcal{Q} est la réunion des images de Ω par l'ensemble des rotations d'axe (O, \vec{i}) .

Ainsi ayant posé

$$\tilde{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mid x\vec{i} + y\vec{j} \in \Omega\}$$

\mathcal{Q} est axisymétrique si et seulement si

$$\mathcal{Q} = \{M(x, y \cos \theta, y \sin \theta) \mid (x, y) \in \tilde{\Omega}, \theta \in [0, 2\pi]\}$$

On posera

$$\Omega_\epsilon = \{M(x, y \cos \theta, y \sin \theta) \mid (x, y) \in \Omega, \theta \in]-\epsilon, \epsilon[\}$$

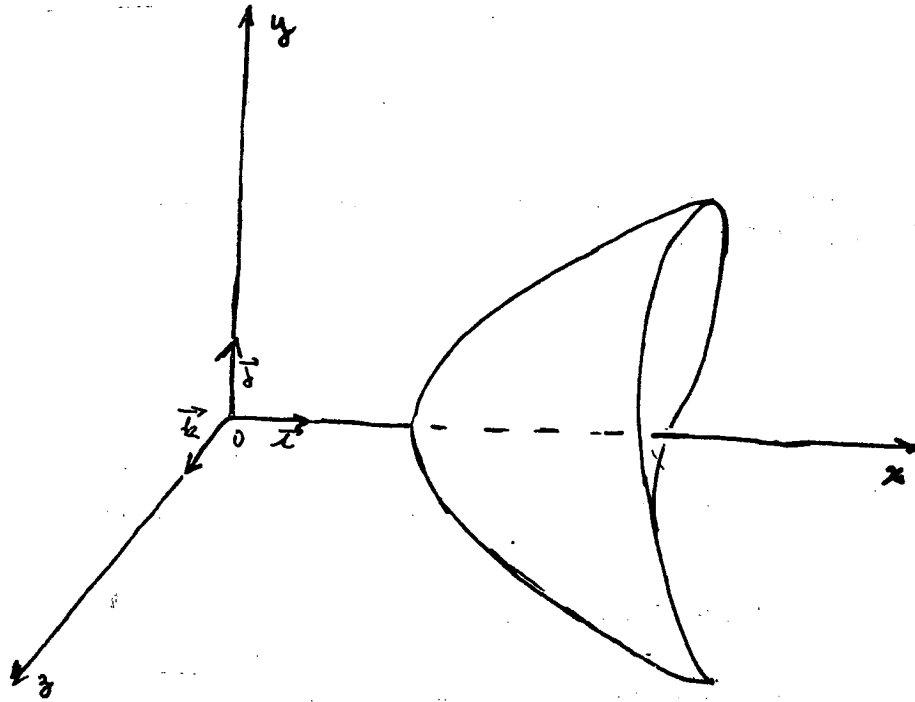
qu'on appellera le **perturbé** de Ω . (figure 1.1)

Remarque : Ω est la limite de Ω_ϵ quand ϵ tend vers 0 .

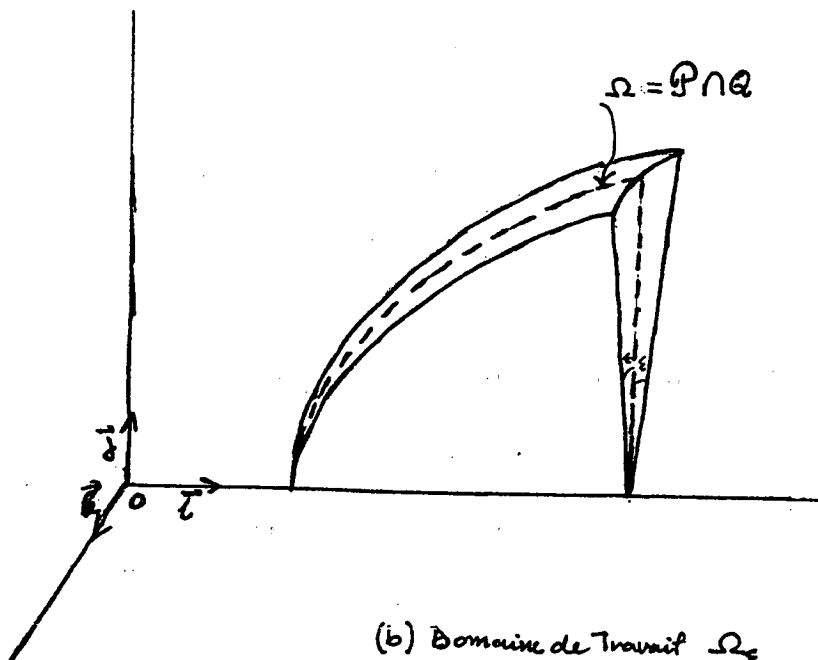
1.2. Champs axisymétriques

Soit \mathcal{Q} un ouvert axisymétrique de E^3 . Considérons les champs respectivement scalaire et vectoriel suivants :

Figure 1.1
Domaine axisymétrique Q et perturbé Ω_ε associé



(a) Domaine axisymétrique Q



(b) Domaine de Travail Ω_ε

$$\rho : M \in \mathcal{Q} \mapsto \rho(M) \in \mathbb{R}$$

$$\vec{V} : M \in \mathcal{Q} \mapsto \vec{V}(M) \in \mathbb{R}^3$$

Ces champs sont axisymétriques d'axe (O, \vec{i}) si pour tout $M(x, y \cos \theta, y \sin \theta)$ élément de \mathcal{Q} on a :

$$\rho(M) = \rho(x, y)$$

et

$$\vec{V}(M) = u(M)\vec{i} + v(M)(\vec{j} \cos \theta + \vec{k} \sin \theta)$$

où les champs scalaires u et v sont axisymétriques d'axe (O, \vec{i}) .

2. Les équations d'EULER

Elles décrivent les écoulements de fluide parfait (non visqueux) compressible. Sous forme conservative on a dans le domaine \mathcal{Q}

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \text{div}(\mathcal{F}(\mathbf{W})) = 0$$

avec

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{V} \\ E \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

$$\mathcal{F} = \mathbf{F}\vec{i} + \mathbf{G}\vec{j} + \mathbf{H}\vec{k}$$

où $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ sont à valeurs dans \mathbb{R}^5 et définis par :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E + p)u \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (E + p)v \end{pmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (E + p)w \end{pmatrix}$$

ρ est la masse volumique en un point M

II. CONSTRUCTION DU SCHEMA

$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ la vitesse en M

E l'énergie par unité de volume

p , la pression en M, est donnée par la loi d'état

$$p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho|\vec{V}|^2)$$

Dans le cas d'un problème axisymétrique d'axe (O, \vec{i}) , c'est à dire \mathcal{Q} axisymétrique ainsi que ρ, \vec{V} et p , si pour tout point $m(x, y, 0) \in \Omega = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ la vitesse est $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$ et pour tout point $M(x, y \cos \theta, y \sin \theta) \in \mathcal{Q}$ on a :

$$\vec{V} = u\vec{i} + v(\vec{j} \cos \theta + \vec{k} \sin \theta)$$

et

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \cos \theta \\ \rho v \sin \theta \\ E \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \cos \theta \\ \rho u v \sin \theta \\ (E + p)u \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \cos \theta \\ \rho u v \cos \theta \\ \rho v^2 \cos^2 \theta + p \\ \rho v^2 \cos \theta \sin \theta \\ (E + p)v \cos \theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \rho v \sin \theta \\ \rho u v \sin \theta \\ \rho v^2 \cos \theta \sin \theta \\ \rho v^2 \sin^2 \theta + p \\ (E + p)v \sin \theta \end{pmatrix}$$

3. Formulation de type Volumes Finis par perturbation de domaine

Le problème étant axisymétrique on ne perd pas de généralité en recherchant la solution aux points de \mathcal{P} . Ainsi notre domaine de travail sera un perturbé Ω_ϵ de Ω où ϵ est un infiniment petit.

Pour toute fonction test ϕ , on a :

$$\int_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} \phi dV + \int_{\Omega_\epsilon} \text{div}(\mathcal{F}(\mathbf{W})) \phi dV = 0$$

Soit \mathcal{D}_m le volume de contrôle en un point $m \in \Omega = \mathcal{P} \cap \Omega_\epsilon$, et $\mathcal{C}_m = \mathcal{D}_m \cap \mathcal{P}$ alors on a :

$$\int_{\mathcal{D}_m} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{D}_m} \operatorname{div}(\mathcal{F}(\mathbf{W})) d\mathcal{V} = 0$$

D'après la formule de Green on a :

$$\int_{\mathcal{D}_m} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{D}_m} \mathcal{F}(\mathbf{W}) \vec{n} d\sigma = 0$$

La technique de perturbation de domaine consiste alors à étudier l'équation asymptotique :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{\mathcal{D}_m} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{D}_m} \mathcal{F}(\mathbf{W}) \vec{n} d\sigma \right) = 0$$

pour analyser ce qui se passe dans $\mathcal{C}_m \subset \Omega$

Puisque les fonctions admissibles sont constantes par morceaux alors une intégration en un point conduit à :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{W}}}{\partial t} \right] \int_{\mathcal{D}_m} d\mathcal{V} \right) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{\partial \mathcal{D}_m} \mathcal{F}(\mathbf{W}) \vec{n} d\sigma \right) = 0$$

un problème approché en $m \in \Omega$.

Dans le cas d'un maillage de type quadrangulaire de la figure (3.1) le bord $\partial \mathcal{D}_m$ de la cellule \mathcal{D}_m peut se décomposer sous la forme :

$$\partial \mathcal{D}_m = S_x \cup S_{x'} \cup S_y \cup S_{y'} \cup S_z \cup S_{z'}$$

Ainsi on peut écrire

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{\partial \mathcal{D}_m} \mathcal{F}(\mathbf{W}) \vec{n} d\sigma \right) = \sum_{a \in \{x, x', y, y'\}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{S_a} \mathcal{F}(\mathbf{W}) \vec{n} d\sigma \right) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{S_z \cup S_{z'}} \mathcal{F}(\mathbf{W}) \vec{n} d\sigma \right)$$

Remarque Pour $a \in \{x, x', y, y'\}$, l'évaluation pratique de

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{S_a} \mathcal{F}(\mathbf{W}) \vec{n} d\sigma \right)$$

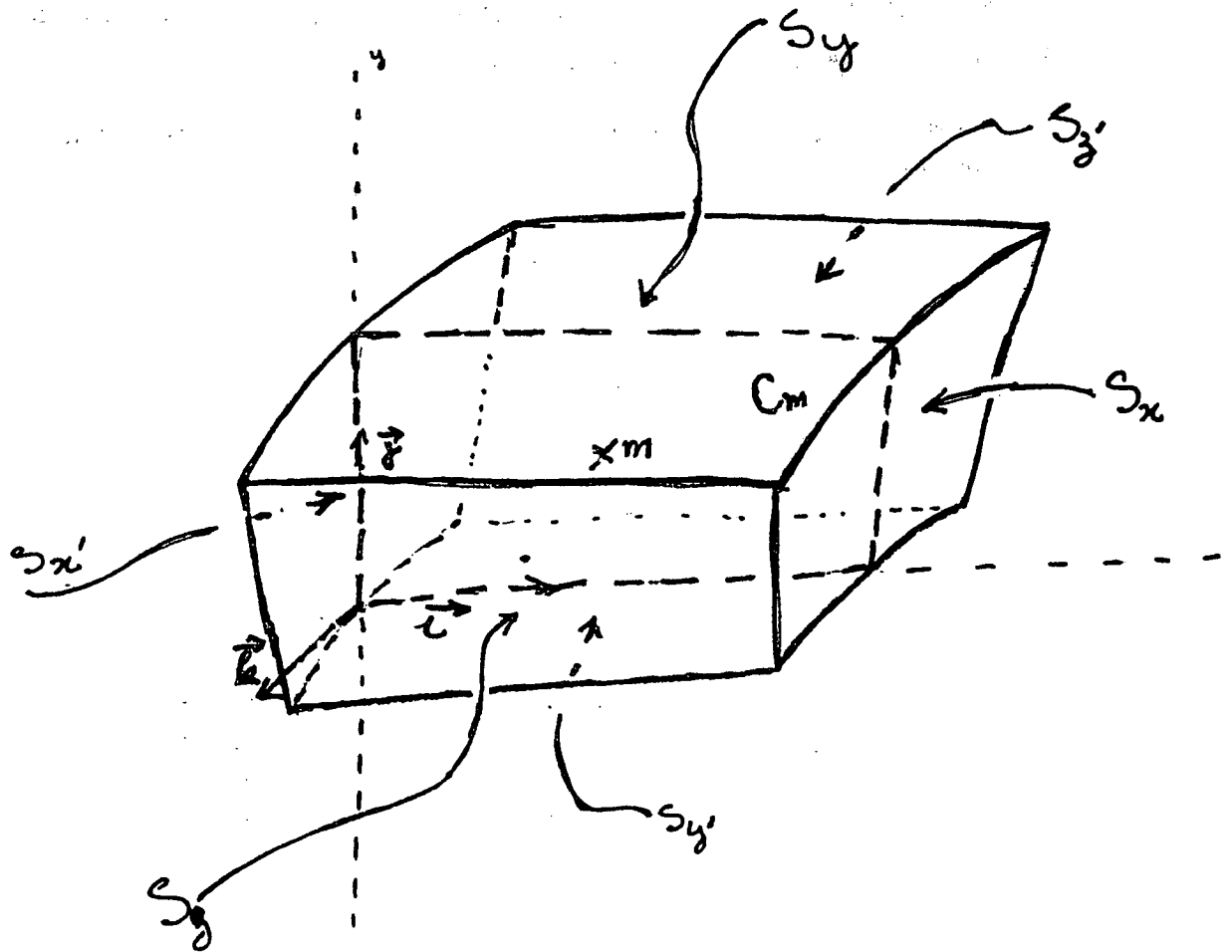
se ramène à celle de la normale intégrée :

$$\vec{\nu}_a = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{S_a} \vec{n} d\sigma \right)$$

utilisé dans la construction de schémas décentrés d'ordre un [voir VKI] .

II. CONSTRUCTION DU SCHEMA

Figure 3.1
Les interfaces du volume de contrôle D_m du point m



$$C_m = \mathcal{Q}_m n \mathcal{P}$$

4. Evaluation d'une limite

On cherche à évaluer la limite suivante :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{S_z \cup S_{z'}} \mathcal{F}(\mathbf{W}) \vec{n} d\sigma \right)$$

Sur l'interface S_a , $a \in \{z, z'\}$ la normale $\vec{n} = -\vec{j} \sin \epsilon \pm \vec{k} \cos \epsilon$, et la vitesse $\vec{V} = u\vec{i} + v(\vec{j} \cos \epsilon \pm \vec{k} \sin \epsilon)$. (Figure (4-1))

Ainsi, sur S_z , d'équation $\theta = \epsilon$, on a en supposant la pression constante sur cette facette :

$$\mathcal{F}(\mathbf{W})\vec{n} = p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin \epsilon \\ \cos \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

et sur $S_{z'}$, d'équation $\theta = -\epsilon$ on a :

$$\mathcal{F}(\mathbf{W})\vec{n} = p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin \epsilon \\ -\cos \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

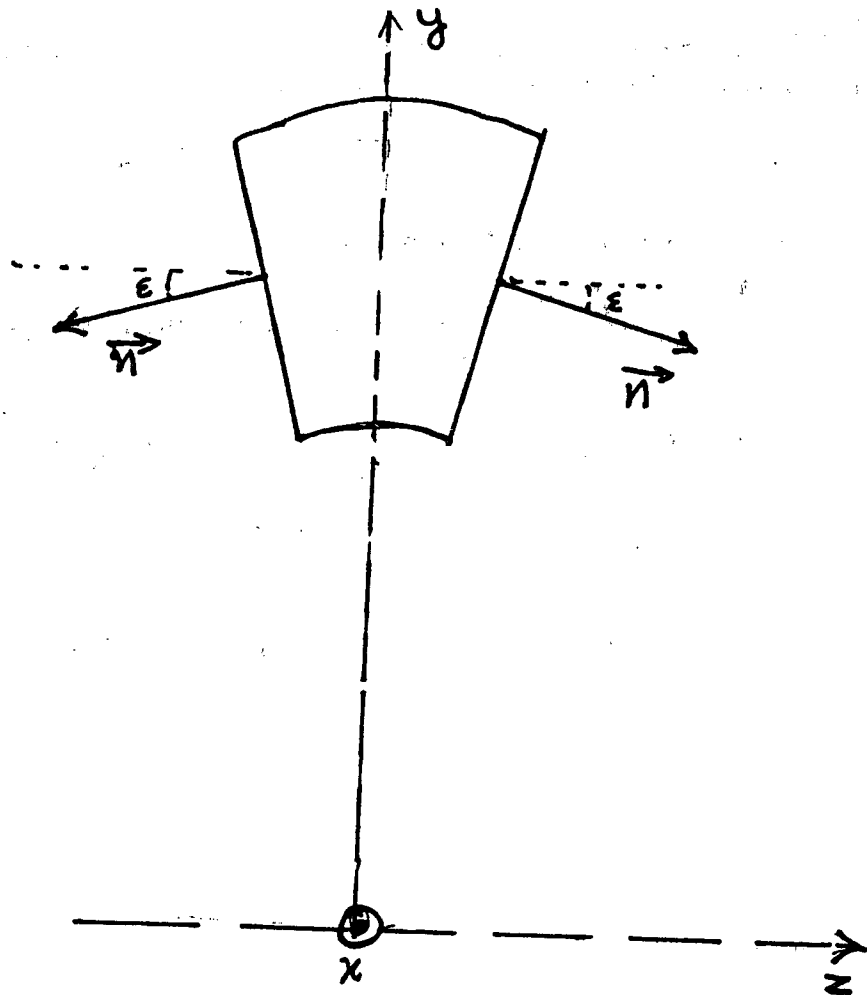
D'où

$$\begin{aligned} \int_{S_z \cup S_{z'}} \mathcal{F}(\mathbf{W})\vec{n} d\sigma &= p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin \epsilon \\ \cos \epsilon \\ 0 \end{pmatrix} \int_{S_z} d\sigma + p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin \epsilon \\ -\cos \epsilon \\ 0 \end{pmatrix} \int_{S_{z'}} d\sigma \\ &= -2p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin \epsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{aire}(C_m) \end{aligned}$$

et on déduit que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{S_z \cup S_{z'}} \mathcal{F}(\mathbf{W})\vec{n} d\sigma \right) = -2p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{aire}(C_m)$$

Figure 4.1
 Les normales aux interfaces S_z et S_z'
 vues face à l'axe (Ox)



5. Calcul des éléments géométriques

5.1. Calcul des normales intégrées

Pour le problème asymptotique il s'agit de calculer $\vec{\eta}_a = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{S_a} \vec{n} d\sigma \right)$ pour $a \in \{x, x', y, y'\}$.

Dans notre cas l'interface S_a est engendrée par la rotation de $\widehat{ATB} = S_a \cap \mathcal{P}$, figure (5-1).

Du fait que \mathcal{Q} est axisymétrique, si $\vec{n} = n_1 \vec{i} + n_2 \vec{j}$ en $m(x, y, 0) \in S_a \cap \mathcal{P}$ alors en tout point $M(x, y \cos \theta, y \sin \theta) \in S_a$ on a

$$\vec{n} = n_1 \vec{i} + n_2 (\vec{j} \cos \theta + \vec{k} \sin \theta)$$

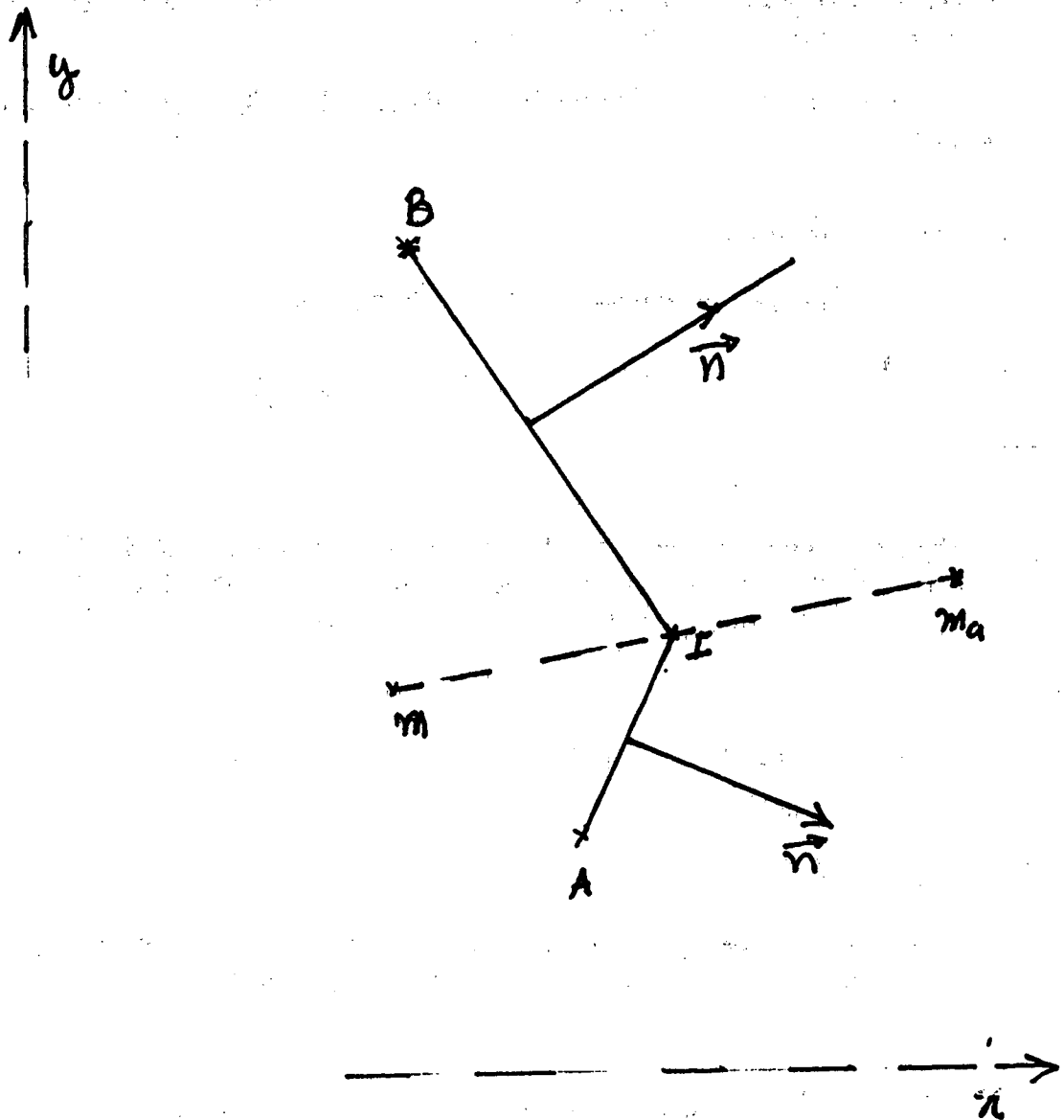
et après un calcul très simple on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{S_a} \vec{n} d\sigma &= \frac{1}{4} [(y_A - y_B)(y_A + y_B)] (\sin 2\theta + 2\theta) \vec{i} \\ &+ \frac{1}{4} [(x_A - x_I)(y_I + y_A) + (x_I - x_B)(y_B + y_I)] \left(\frac{1}{3} \sin 3\theta + 3 \sin \theta \right) \vec{j} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \vec{\eta}_a &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{S_a} \vec{n} d\sigma \right) \\ &= [(y_A - y_B)(y_A + y_B)] \vec{i} + [(x_A - x_I)(y_I + y_A) + (x_I - x_B)(y_B + y_I)] \vec{j} \end{aligned}$$

Figure 5.1
 La génératrice d'un interface S_a , $a \in \{x, x', y, y'\}$
 et la normale associée



5.2. Calcul de la mesure d'une cellule

Pour notre problème, cette mesure,

$$mes(C_m) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{\mathcal{D}_m} dV \right)$$

a la dimension d'un volume (par unité d'angle), contrairement à un problème bidimensionnel où cette mesure est celle d'une surface.

Dans le cas présent la génératrice C_m de la cellule \mathcal{D}_m est polygonale et son contour

$$\partial C_m \equiv A_1 A_2 \dots A_N \subset \mathcal{P}$$

est non croisé et fermé.

Un calcul simple (en annexe) permet d'établir que :

$$mes(C_m) = \frac{1}{3} \sum_{\substack{1 \leq i \leq N \\ (N+1 \equiv 1)}} [y_{A_i}^2 + y_{A_{i+1}}^2 + y_{A_i} y_{A_{i+1}}] [x_{A_i} - x_{A_{i+1}}]$$

Remarque Le calcul des éléments géométriques nous a permis de constater que $\vec{\eta}_a$ est un élément du plan vectoriel engendré par (\vec{i}, \vec{j}) et est, ainsi que $mes(C_m)$, entièrement déterminé par la connaissance de la trace C_m de \mathcal{D}_m sur le demi-plan \mathcal{P} .

6. Une approximation d'ordre 1

6.1. A l'intérieur

Il est à remarquer que pour tout point $m \in \Omega$, si $a \in \{x, x', y, y'\}$ alors on peut écrire en tenant compte du fait que les fonctions admissibles sont constantes par morceaux :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{S_n} \mathcal{F}(\mathbf{W}) \vec{n} d\sigma \right) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_{a\epsilon} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{S_1 \cup S_2} \mathcal{F}(\mathbf{W}) \vec{n} d\sigma \right) \\ &= \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_{a\epsilon} \right) \vec{\eta}_a \end{aligned}$$

où

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_{a\epsilon} = \mathbf{F}_a \vec{i} + \mathbf{G}_a \vec{j} + \mathbf{H}_a \vec{k}$$

avec

$$\mathbf{F}_a = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ 0 \\ (E+p)u \end{pmatrix}_a \quad \mathbf{G}_a = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ 0 \\ (E+p)v \end{pmatrix}_a \quad \mathbf{H}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix}_a$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{W}}}{\partial t} \right] \int_{\mathcal{D}_m} dV \right) + \sum_{a \in \{x, x', y, y'\}} (\mathbf{F}_a \vec{i} + \mathbf{G}_a \vec{j}) \bar{\eta}_a \\ + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{S_z \cup S_{z'}} \mathcal{F}(\mathbf{W}) \bar{n} d\sigma \right) = 0 \end{aligned}$$

On déduit l'équation ;

$$\begin{aligned} mes(\mathcal{C}_m) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{W}}}{\partial t} \right] + \sum_{a \in \{x, x', y, y'\}} (\mathbf{F}_a \vec{i} + \mathbf{G}_a \vec{j}) \bar{\eta}_a \\ - 2p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} aire(\mathcal{C}_m) = 0 \end{aligned}$$

En remarquant que par passage à la limite , on a

$$\bar{\mathbf{W}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ 0 \\ E \end{pmatrix}$$

alors nous réécrivons l'équation précédente sous la forme

$$mes(C_m) \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} + \sum_{a \in \{x, x', y, y'\}} (F_a \vec{i} + G_a \vec{j}) \tilde{\eta}_a - 2p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} aire(C_m) = 0$$

Nous constatons que le passage à la limite annihile la contribution de la troisième composante du vecteur vitesse \vec{V} , composante qui dans ce cas est nulle. Nous nous retrouvons alors avec un problème plan avec apparition d'un terme de source dû à la pression.

6.2. Conditions aux bords

Si $m \in \partial C$ sans être sur l'axe de symétrie, on a l'équation:

$$\int_{\mathcal{D}_m} \frac{\partial W}{\partial t} dV + \sum_{\substack{n \in \mathcal{P} \\ \text{voisin} \in \text{bord}}} \int_{\mathcal{D}_m \cap \mathcal{D}_n} \mathcal{F}(W) \vec{n} d\sigma + \sum_{\substack{n \in \mathcal{P} \\ \text{voisin} \notin \text{bord}}} \int_{\mathcal{D}_m \cap \mathcal{D}_n} \mathcal{F}(W) \vec{n} d\sigma + \int_{\mathcal{D}_m \cap \text{bord}} \mathcal{F}(W) \vec{n} d\sigma + \int_{S_z \cup S_{z'}} \mathcal{F}(W) \vec{n} d\sigma = 0$$

Ainsi par perturbation on peut écrire :

$$\begin{aligned}
& \text{mes}(C_m) \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} + \sum_{\substack{n \in \mathcal{P} \\ \text{voisin} \in \text{bord}}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{\mathcal{D}_m \cap \mathcal{D}_n} \mathcal{F}(\mathbf{W}) \tilde{n} d\sigma \right) \\
& + \sum_{\substack{n \in \mathcal{P} \\ \text{voisin} \notin \text{bord}}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{\mathcal{D}_m \cap \mathcal{D}_n} \mathcal{F}(\mathbf{W}) \tilde{n} d\sigma \right) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{\mathcal{D}_m \cap \text{bord}} \mathcal{F}(\mathbf{W}) \tilde{n} d\sigma \right) + \\
& - 2p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{aire}(C_m) = 0
\end{aligned}$$

Remarque L'évaluation de $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{\mathcal{D}_m \cap \text{bord}} \mathcal{F}(\mathbf{W}) \tilde{n} d\sigma \right)$ dépend essentiellement du type de bord considéré. On a généralement deux types de bord :

6.2.1. Condition de paroi

Dans ce cas on a $\vec{V} \cdot \tilde{n} = 0$ en tout point $M(x, y \cos \phi, y \sin \phi)$ et en ce point on a :

$$\mathcal{F}(\mathbf{W}) \tilde{n} = p \begin{pmatrix} 0 \\ n_1 \\ n_2 \cos \phi \\ n_2 \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{\mathcal{D}_m \cap \text{paroi}} \mathcal{F}(\mathbf{W}) \tilde{n} d\sigma \right) = p \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\vec{\eta} = \eta_1 \vec{i} + \eta_2 \vec{j} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{\mathcal{D}_m \cap \text{paroi}} \tilde{n} d\sigma \right)$$

6.3. Condition sur l'axe de symétrie

Sur l'axe de symétrie, $\cos \theta$ et $\sin \theta$ sont indéterminés. Aussi en tout point M de l'axe pour assurer que \vec{V} soit univoque, il faut que :

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} = u\vec{i} + v(\vec{j} \cos \theta + \vec{k} \sin \theta) \forall \theta$$

d'où

$$v [\vec{j}(1 - \cos \theta) + \vec{k} \sin \theta] = 0 \quad \forall \theta$$

Ainsi $v = 0$ et $\vec{V} = u\vec{i}$.

Remarque $\partial \mathcal{D}_m \cap axe$ est de mesure nulle pour la mesure $d\sigma$, donc on a trivialement

$$\int_{\mathcal{D}_m \cap axe} \vec{n} d\sigma = 0$$

7. Equation d'advection scalaire

7.1. *Cas sans source* : $\rho_t + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$

Le domaine \mathcal{Q} et la vitesse \vec{V} sont axisymétriques d'axe (O, \vec{i}) .

Soit $\vec{V}_0 = u\vec{i} + v\vec{j}$ la vitesse en $m(x, y, 0) \in \Omega$, si \mathcal{D}_m est la cellule de m dans le domaine de travail Ω_ϵ alors la méthode de perturbation de domaine permet d'écrire :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{\mathcal{D}_m} \rho_t d\mathcal{V} \right) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{\partial \mathcal{D}_m} \rho \vec{V} \vec{n} d\sigma \right) = 0$$

En respectant les notations précédentes on a :

$$\begin{aligned} & [\bar{\rho}_t] \text{mes}(C_m) + \sum_{a \in \{x, x', y, y'\}} [\bar{\rho}]_a \vec{V}_0 \vec{n}_a \\ & + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{S_z \cup S_{z'}} \rho \vec{V} \vec{n} d\sigma \right) = 0 \end{aligned}$$

Sur $S_z \cup S_{z'}$, \vec{V} est orthogonal à la normale \vec{n} . Donc $\vec{V} \vec{n} = 0$ et partant

$$\int_{S_z \cup S_{z'}} \rho \vec{V} \vec{n} d\sigma = 0$$

Ainsi on a

$$[\bar{\rho}_t] \text{mes}(C_m) + \sum_{a \in \{x, x', y, y'\}} [\bar{\rho}]_a \vec{V}_0 \vec{n}_a = 0$$

En résumé on est ramené à un problème dans le demi-plan \mathcal{P} avec un changement de mesure : la mesure $dx dy$ est devenue $y dx dy$.

7.2. *Cas avec source* : $\rho_t + \text{div}(\rho \vec{V}) = \Phi(\rho, \dots)$

D'après les observations précédentes sur \vec{V} et \vec{n} , on a par perturbation de domaine et intégration en un point :

$$[\bar{\rho}_t]_{\text{mes}(\mathcal{C}_m)} + \sum_{a \in \{x, x', y, y'\}} [\bar{\rho}]_a \vec{V}_0 \vec{\eta}_a = \bar{\Phi}_{\text{mes}(\mathcal{C}_m)}$$

ou

$$[\bar{\rho}_t] + \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{C}_m)} \sum_{a \in \{x, x', y, y'\}} [\bar{\rho}]_a \vec{V}_0 \vec{\eta}_a = \bar{\Phi}$$

Cette équation a une structure formelle identique au cas 2-D.

Pour avoir quelques informations susceptibles de nous éclairer sur le comportement de la discrétisation en EULER, il nous faut étudier le comportement du schéma de discrétisation pour l'advection scalaire du point de vue de la stabilité et de la dispersion.

III. ANALYSE D'UN MODELE SIMPLIFIE

Nous nous bornerons au problème scalaire :

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div}(u \vec{V}) = 0 & \text{sur } \mathcal{Q} \times]0, T[\\ u(M, 0) = u_0(M) & \text{sur } \mathcal{Q} \\ \operatorname{div}(\vec{V}) = 0 & \text{sur } \mathcal{Q} \end{cases}$$

où \mathcal{Q} , \vec{V} et u sont axisymétriques d'axe (O, \vec{i}) .

Pour simplifier nous prendrons comme champ de vitesse

$$\vec{V} = a(r)\vec{i} + \frac{K(x)}{r}\vec{e}_2$$

au point $M(x, r \cos \theta, r \sin \theta)$ avec $\vec{e}_2 = \vec{j} \cos \theta + \vec{k} \sin \theta$.

On supposera qu'au voisinage de l'axe $K(x) \equiv 0$. On remarque bien que $\operatorname{div}(\vec{V}) = 0$ et $\vec{\nabla} u = u_x \vec{i} + u_r \vec{e}_2$.

L'équation $u_t + \operatorname{div}(u \vec{V}) = 0$ devient :

$$u_t + \vec{V} \vec{\nabla} u = 0$$

c'est à dire

$$u_t + a(r)u_x + \frac{K(x)}{r}u_r = 0$$

Remarque Tout se passe comme si on travaille dans le demi-plan $\mathcal{P} = (O, \vec{i}, \vec{e}_2^+)$

Dans la suite nous utiliserons à la place de la technique de perturbation de domaine mise en oeuvre dans la partie 1, une technique équivalente dans le cas scalaire et qui consiste à travailler sur des cellules toriques.

1. Formulation Volumes Finis

On considère un maillage régulier du demi-plan \mathcal{P} (figure 1)

En un point non axial m , la formulation Volumes Finis donne :

$$\int_{\mathcal{D}_m} u_t dV + \int_{\partial \mathcal{D}_m} u \vec{V} \vec{n} d\sigma = 0$$

où \mathcal{D}_m est une cellule torique engendrée par \mathcal{C}_m .

Ainsi par intégration en un point, on a

$$[\bar{u}_t] \text{mes}(\mathcal{C}_m) + \sum_{m_\alpha \text{ voisin}} \int_{\partial \mathcal{D}_m \cap \partial \mathcal{D}_{m_\alpha}} u \vec{V} \vec{n} d\sigma = 0$$

Par approximation spatiale on a :

$$[\bar{u}_t] \text{mes}(\mathcal{C}_m) + \sum_{\alpha \in \{x, x', y, y'\}} [\bar{u}]_\alpha \int_{\partial \mathcal{D}_m \cap \partial \mathcal{D}_{m_\alpha}} \vec{V} \vec{n} d\sigma = 0$$

où $\text{mes}(\mathcal{C}_m) = \int_{\mathcal{D}_m} dV$ et

$$[\bar{u}]_\alpha = \begin{cases} u_m & \text{si } \int_{\partial \mathcal{D}_m \cap \partial \mathcal{D}_{m_\alpha}} \vec{V} \vec{n} d\sigma \geq 0 \\ u_{m_\alpha} & \text{sinon} \end{cases}$$

Sur un réseau du demi-plan \mathcal{P} défini par $x_{j+1} = x_j + \Delta x$, $r_{l+1} = r_l + \Delta r$ et $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, si m est le point (x_j, r_l) et $u_{j,l}^n$ la valeur de la fonction u en m à la date t_n alors pour a et K non négatifs on a l'équation aux différences :

$$\frac{u_{j,l}^{n+1} - u_{j,l}^n}{\Delta t} + a(r_l) \frac{u_{j,l}^n - u_{j-1,l}^n}{\Delta x} + \frac{K(x_j)}{r_l} \frac{u_{j,l}^n - u_{j,l-1}^n}{\Delta r} = 0$$

en tout point non axial.

En posant

$$\nu_1 = a(r_l) \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

et

$$\nu_2 = \frac{K(x_j)}{r_l} \frac{\Delta t}{\Delta r}$$

alors le schéma aux différences devient :

$$u_{j,l}^{n+1} = (1 - \nu_1 - \nu_2)u_{j,l}^n + \nu_1 u_{j-1,l}^n + \nu_2 u_{j,l-1}^n$$

On remarque que le schéma est consistant. Par ailleurs le schéma vérifie la positivité si $1 - \nu_1 - \nu_2 > 0$ car ν_1 et ν_2 sont positifs pour a et K non négatifs .

Ainsi on a la positivité du schéma pour

$$\nu_1 + \nu_2 < 1$$

Il faut remarquer aussi que du fait de la consistance du schéma , la positivité conduit au principe du maximum.

Lorsque a et K ne sont plus nécessairement non négatifs , on peut généraliser le schéma aux différences de la manière suivante :

$$u_{jl}^{n+1} = \begin{cases} (1 - |\nu_1| - |\nu_2|)u_{j,l}^n + |\nu_1|u_{j-1,l}^n + |\nu_2|u_{j,l-1}^n & \text{si } a > 0 \text{ et } K > 0 \\ (1 - |\nu_1| - |\nu_2|)u_{j,l}^n + |\nu_1|u_{j+1,l}^n + |\nu_2|u_{j,l-1}^n & \text{si } a < 0 \text{ et } K > 0 \\ (1 - |\nu_1| - |\nu_2|)u_{j,l}^n + |\nu_1|u_{j+1,l}^n + |\nu_2|u_{j,l+1}^n & \text{si } a < 0 \text{ et } K < 0 \\ (1 - |\nu_1| - |\nu_2|)u_{j,l}^n + |\nu_1|u_{j-1,l}^n + |\nu_2|u_{j,l+1}^n & \text{si } a > 0 \text{ et } K < 0 \end{cases}$$

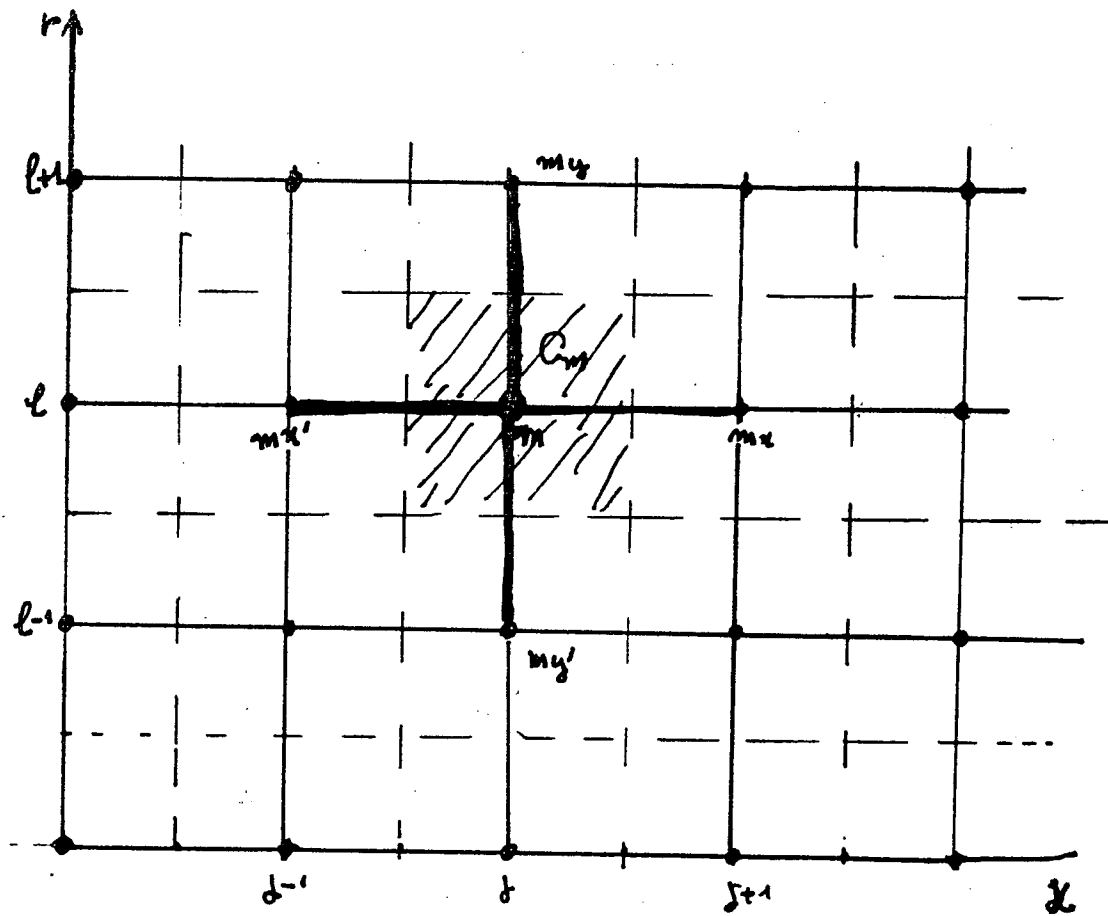
Dans tous les cas le schéma est consistant et la positivité est assurée si :

$$|\nu_1| + |\nu_2| \leq 1$$

et le principe du maximum est également vérifié ,c'est à dire :

$$\forall n, \forall j, l \quad \min_{p,q} (u_{p,q}^o) \leq u_{j,l}^n \leq \max_{p,q} (u_{p,q}^o)$$

Figure 1
Maillage régulier du demi-plan \mathcal{P}



$$C_m = \mathcal{Q}_m \cap \mathcal{P}$$

\mathcal{Q}_m le volume de contrôle en m

1.1. Equation équivalente

Nous nous contenterons du cas où a et K sont positifs . Par un développement de Taylor autour de x_j, r_l, t_n , l'équation aux différences donne :

$$u_t a(r) u_x + \frac{K(x)}{r} u_r = -\frac{\Delta t}{2} u_{tt} - \frac{\Delta t^2}{6} u_{ttt} + O(\Delta t^2) \\ + a(r) \frac{\Delta x}{2} u_{xx} + O(\Delta x^2) + \frac{K(x)}{r} \frac{\Delta r}{2} u_{rr} + O(\Delta r^2)$$

On en déduit alors que l'opérateur :

$$\frac{\partial}{\partial t} = - \left(a(r) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{K(x)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + O(\Delta t, \Delta x, \Delta r)$$

Dans le cas où a et K sont constants , on a :

$$u_{tt} = -\frac{K^2}{r^3} u_r + a^2 u_{xx} + 2a \frac{K}{r} u_{rx} + \frac{K^2}{r^2} u_{rr} + O(\Delta t, \Delta x, \Delta r)$$

et

$$u_{ttt} = \frac{3K^3}{r^5} u_r + a \frac{K^2}{r} u_{xr} + \frac{K^3}{r^4} u_{rr} + \dots$$

d'où

$$u_t + a u_x + \frac{K}{r_l} u_r = \left(\frac{K}{2r_l^2} \nu_2 \Delta r \right) u_r (-a \nu_2 \Delta r) u_{xr} \\ + \frac{a}{2} \Delta x (1 - \nu_1) u_{xx} + \frac{K}{2r_l} \Delta r (1 - \nu_2) u_{rr} + O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta r^2, \dots)$$

Il apparaît que le schéma est précis à l'ordre 1 . De plus contrairement aux schéma d'ordre 1 usuels (en 2-D) , dans le terme $O(\Delta r)$, on trouve une dérivée d'ordre impair , u_r , qui affecte la phase . Il est donc intéressant d'étudier l'erreur de phase du schéma .

1.2. Analyse de Fourier

Avec $\vec{\kappa} = \kappa_1 \vec{e}_1 + \kappa_2 \vec{e}_2$ et en posant $\theta_1 = \kappa_1 \Delta x$ $\theta_2 = \kappa_2 \Delta r$, pour un mode de Fourier $u = e^{i\vec{\kappa}\vec{m}}$ la valeur propre associée g est donnée par :

$$g = \begin{cases} 1 - |\nu_1|(1 - e^{-i\theta_1}) - |\nu_2|(1 - e^{-i\theta_2}) & \text{si } a > 0 \text{ et } K > 0 \\ 1 - |\nu_1|(1 - e^{i\theta_1}) - |\nu_2|(1 - e^{-i\theta_2}) & \text{si } a < 0 \text{ et } K > 0 \\ 1 - |\nu_1|(1 - e^{i\theta_1}) - |\nu_2|(1 - e^{i\theta_2}) & \text{si } a < 0 \text{ et } K < 0 \\ 1 - |\nu_1|(1 - e^{-i\theta_1}) - |\nu_2|(1 - e^{i\theta_2}) & \text{si } a > 0 \text{ et } K < 0 \end{cases}$$

Pour $\vec{\nu} = \nu_1 \vec{e}_1 + \nu_2 \vec{e}_2$ donné, le rayon spectral de l'opérateur

$$G : u^n \mapsto u^{n+1}$$

c'est à dire

$$\max_{\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]} |g|$$

nous renseigne sur la stabilité du schéma.

Le domaine de stabilité du schéma est :

$$\Gamma = \{(\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max_{\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]} |g| \leq 1\}$$

Par changement d'unité $(1, 1) \mapsto (\Delta x, \Delta r)$, la recherche de Γ se ramène à la recherche de

$$\Gamma' = \{(\nu_1 \Delta x, \nu_2 \Delta r) \in \mathbb{R}^2 \mid \max_{\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]} |g| \leq 1\}$$

Ainsi Γ' peut se représenter à l'échelle de la molécule aux différences.

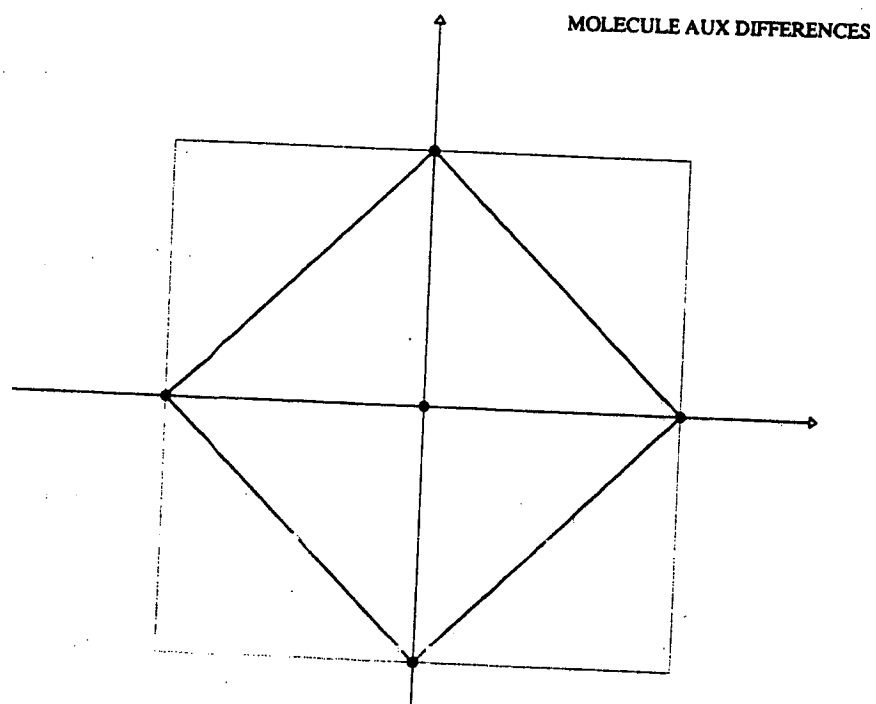
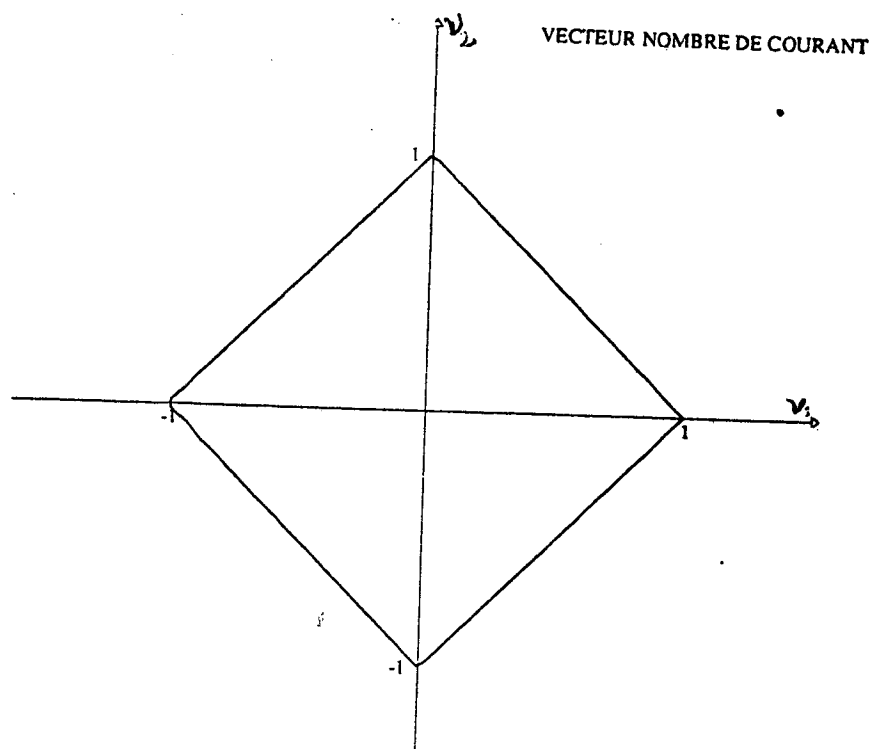
Ici les analyses nous montrent que

$$\Gamma = \{(\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |\nu_1| + |\nu_2| \leq 1\}$$

Remarque On constate que le schéma vérifie la positivité et la stabilité dans le même domaine Γ (figures 2.a et 2.b).

Par ailleurs, il est à remarquer que les conditions de stabilité, bien qu'étant locales dépendent uniquement des paramètres adimensionnés ν_1 et ν_2 . Très loin de l'axe (r grand), la condition se réduit au 1-D ($|\nu_1| \leq 1$). Par contre, près de l'axe (r petit) la condition sur le pas de temps peut devenir très restrictive ($\Delta t \sim r$).

Figure 2
 Domaine de stabilité d'un schéma d'ordre 1



L'étude du comportement du schéma devra être complétée par l'analyse de son comportement en fréquence .

1.3. Dissipation et dispersion

Pour simplifier nous ne regarderons ces phénomènes dans la direction d'advection uniquement et sur un maillage vérifiant $\Delta x = \Delta r = h$

Soit $\vec{c} = a\vec{i} + \frac{K}{r_l}\vec{e}_2$ la vitesse d'advection en (x_j, r_l) . Ainsi

$$c = \|\vec{c}\| = \frac{\sqrt{r_l^2 a^2 + K^2}}{r_l}$$

Le vecteur nombre de Courant

$$\vec{\nu} = a \frac{\Delta t}{\Delta x} \vec{i} + \frac{K}{r_l} \frac{\Delta t}{\Delta r} \vec{e}_2 = \frac{\Delta t}{h} \vec{c}$$

Posons

$$\vec{\nu} = \nu(\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{e}_2)$$

et soit

$$\vec{\kappa} = \kappa(\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{e}_2)$$

la pulsation dans la direction d'advection , la longueur d'onde dans cette direction sera $\lambda = \frac{2\pi}{\kappa}$. Le vecteur nombre d'onde dans cette direction est

$$\vec{\kappa}h = \kappa h(\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{e}_2)$$

On sait que la valeur propre g est fonction de $\nu_1, \nu_2, \theta_1, \theta_2$. Comme $\frac{\lambda}{h} = \frac{2\pi}{\kappa h}$ alors en posant $\theta = \frac{2\pi}{(\frac{\lambda}{h})}$, on a :

$$\theta_1 = \kappa_1 \Delta x = \theta \cos \alpha$$

$$\theta_2 = \kappa_2 \Delta r = \theta \sin \alpha$$

De même on a $\nu_1 = \nu \cos \alpha$ et $\nu_2 = \nu \sin \alpha$ avec $\nu = \frac{c\Delta t}{h}$. On déduit alors dans ce cas que

$$g = 1 - \nu |\cos \alpha| \left(1 - e^{-i\theta |\cos \alpha|}\right) - \nu |\sin \alpha| \left(1 - e^{-i\theta |\sin \alpha|}\right)$$

Ainsi $g = g(\nu, \theta, \alpha)$ avec $\theta = \frac{2\pi}{(\frac{\lambda}{h})}$, $\nu > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque Pour tout θ , ν et α on a :

$$g(\nu, \theta, \alpha) = \begin{cases} g(\nu, \theta, -\alpha) \\ g(\nu, \theta, \frac{\pi}{2} - \alpha) \\ g(\nu, \theta, \frac{\pi}{2} + \alpha) \\ g(\nu, \theta, \pi - \alpha) \end{cases}$$

Ainsi dans le repère (O, \vec{i}, \vec{e}_2) , les courbes polaires représentatives de :

$$\alpha \mapsto |g|$$

et

$$\alpha \mapsto \frac{Arg(g)}{(-\theta\nu)}$$

présentent des symétries par rapport aux axes de coordonnées ainsi que par rapport aux bissectrices du repère. On peut donc se contenter de les représenter pour $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Nos observations (figure 3.a à 3.d) nous permettent de dire que le schéma génère une solution toujours en avance de phase sur la solution exacte. Ce déphasage est surtout accentué dans la direction $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Pour $\nu \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ (limite de stabilité), le schéma est très peu dissipatif, surtout dans la direction $\alpha = \frac{\pi}{4}$. La dissipation est surtout observée en hautes fréquences, notamment dans les directions $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Jusqu'ici toutes nos analyses ont porté sur les points du réseau qui sont en dehors de l'axe de symétrie. L'étude ne pourrait être complète sans une incursion au voisinage immédiat de l'axe.

1.4. Comportement du schéma au voisinage de l'axe de symétrie

La vitesse \vec{V} étant axisymétrique, il existe $(a, b) \in L^2(\mathbb{R}^2)^2$ tel que

$$\vec{V} = a\vec{i} + b(\vec{j} \cos \theta + \vec{k} \sin \theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Pour les cellules placées sur l'axe, \vec{V} est indépendant de θ . Ainsi $b \equiv 0$ sur un voisinage \mathcal{V}_{axe} de l'axe. Dans ce voisinage, $div \vec{V} = 0$ conduit à $a_x = 0$, c'est à dire $a = a(r)$. D'où

$$\begin{cases} u_t + div(u\vec{V}) = 0 \\ div \vec{V} = 0 \end{cases}$$

devient

$$u_t + a(0)u_x = 0$$

L'approximation Volumes Finis conduit à l'équation aux différences :

$$\frac{u_{jl}^{n+1} - u_{jl}^n}{\Delta t} + a(r_l) \frac{u_{jl}^n - u_{j-1l}^n}{\Delta x} = 0$$

en tout point (x_j, r_l) avec $r_l = 0$ et $a(r_l) > 0$.

Ainsi le developpement de Taylor autour de $(x_j, 0)$ à la date t_n donne :

$$u_t + \frac{\Delta t}{2} u_{tt} + O(\Delta t^2) + a(0) \left(u_x - \frac{\Delta x}{2} u_{xx} + O(\Delta x^2) \right) = 0$$

d'où l'equation équivalente

$$u_t + a(0)u_x = a(0) \frac{\Delta x}{2} (1 - \nu_1) u_{xx} + O(\Delta t^2, \Delta x^2 \dots)$$

On a un schéma d'ordre 1. Par ailleurs on observe un comportement monodimensionnel le long de l'axe .

figure 3.a

AMPLIFICATION DU SCHEMA

nombre de courant= 0.4

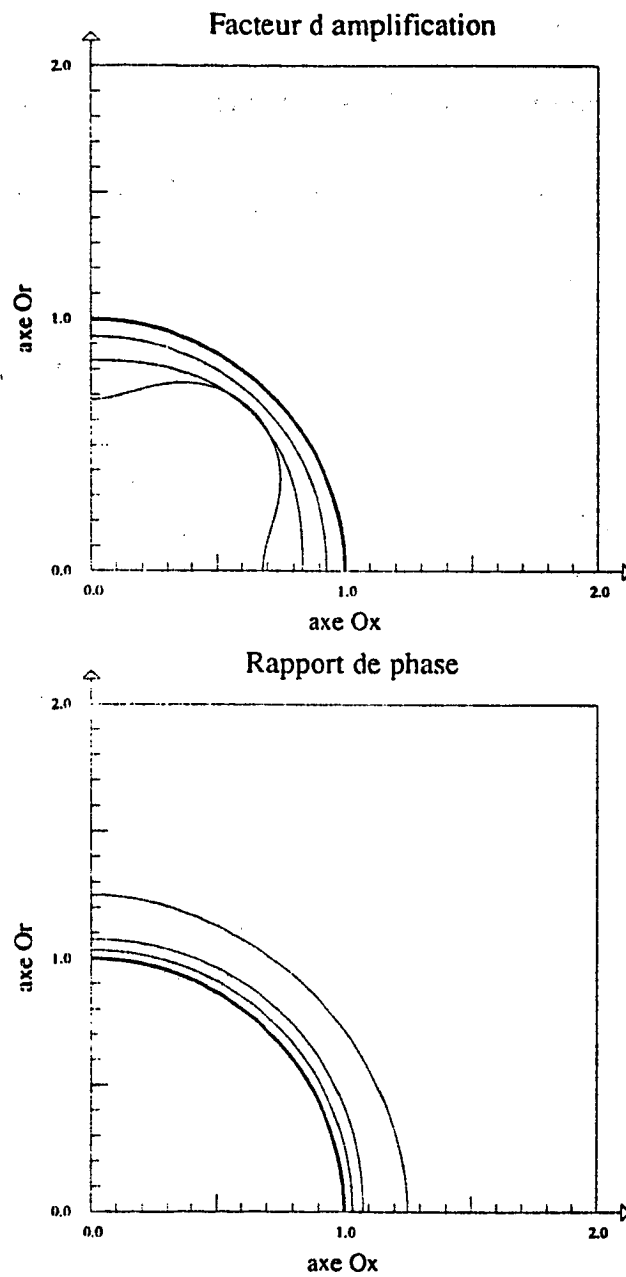


figure 3.b

AMPLIFICATION DU SCHEMA

nombre de courant= 0.5

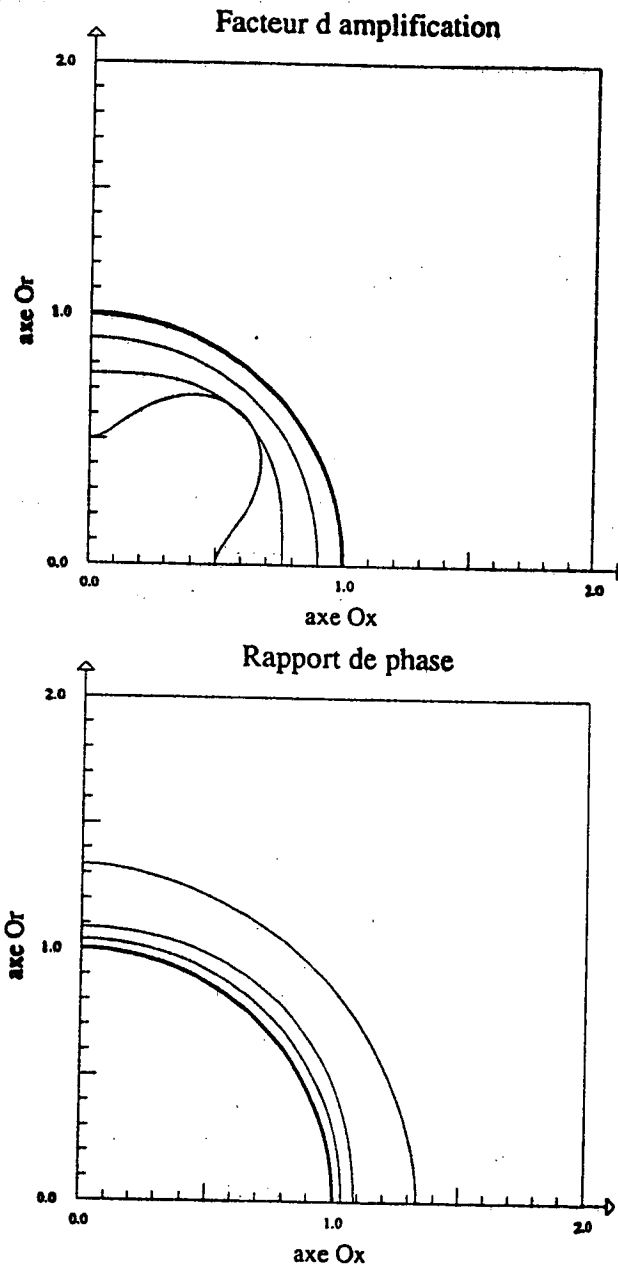


figure 3.c

AMPLIFICATION DU SCHEMA

nombre de courant= 0.7

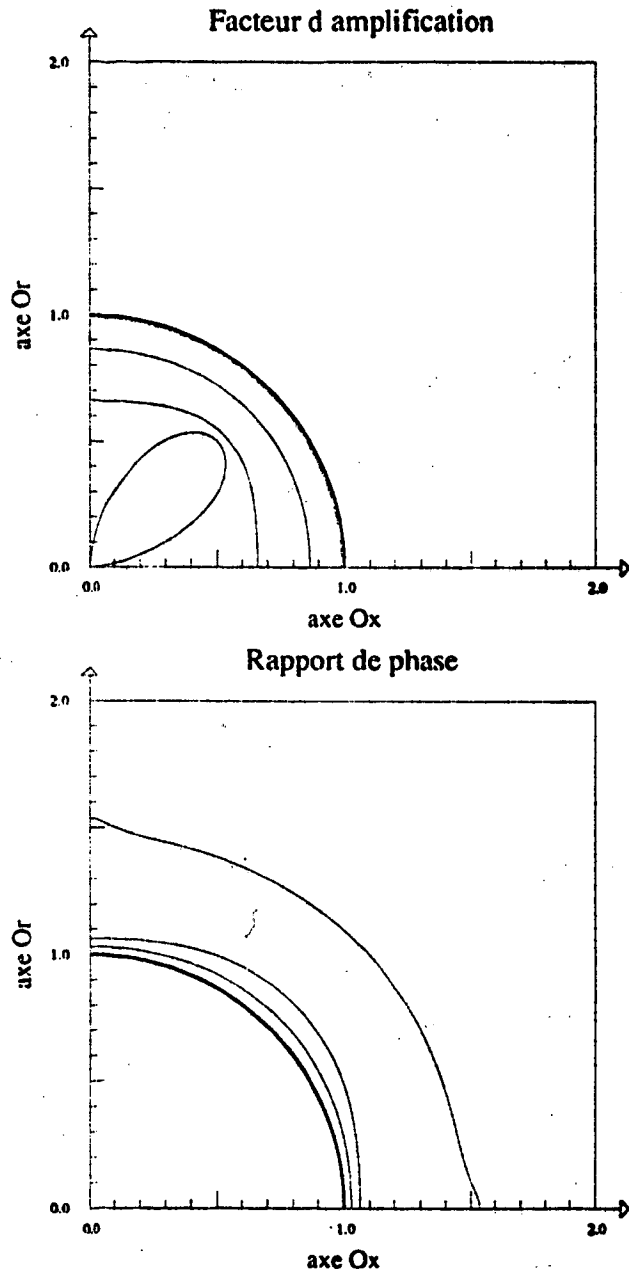
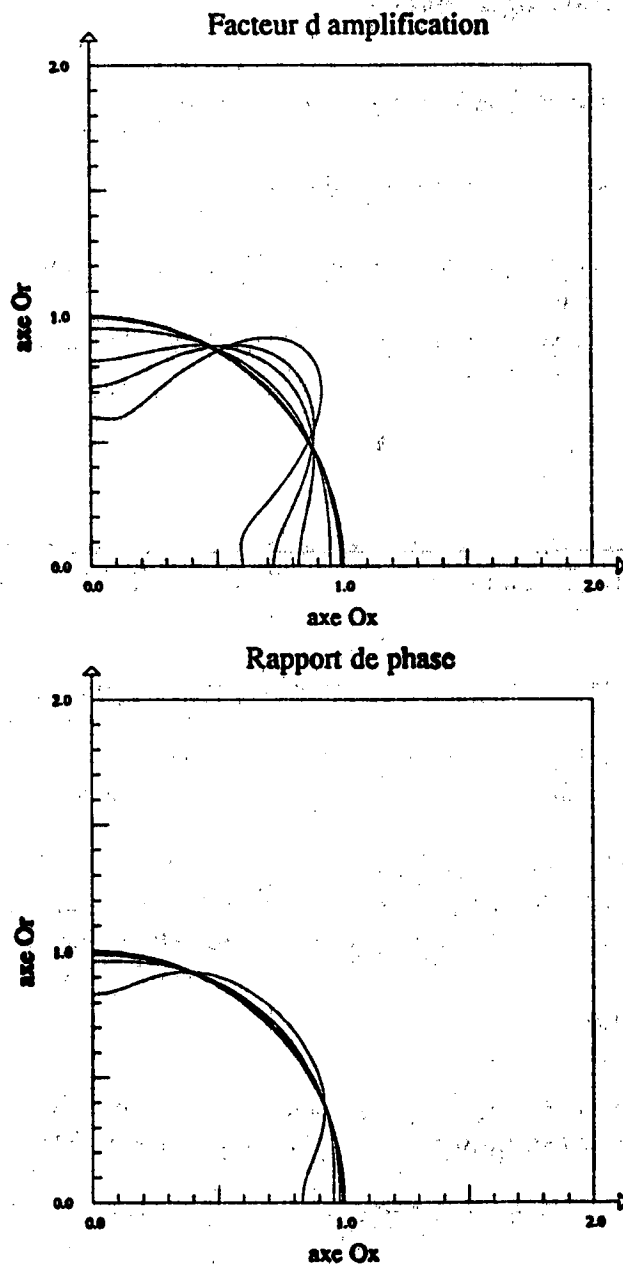


figure 3.d

AMPLIFICATION DU SCHEMA

nombre de courant= 0.8



IV. TESTS NUMERIQUES

1. Fluide parfait non réactif

1.1. Comparaison d'écoulements 2-D et axisymétrique

Pour cette série d'expériences de validation, on a calculé deux types de cas tests :

- écoulement supersonique sur une rampe (2-D) ou un cône (axisymétrique) présentant un choc attaché ,
- écoulement hypersonique sur un cylindre (2-D) ou une sphère (axisymétrique) présentant un choc détaché

1.1.1. Choc attaché

Pour valider notre méthode de capture de choc on a calculé l'écoulement sur une rampe pour un nombre de mach à l'infini égal à 2 , et une inclinaison de 20° pour laquelle la solution exacte est connue .

Pour ce calcul un maillage grossier et non adapté a été utilisé (figure 1.a).

Les figures 1.b et 1.c représentent les lignes d'iso-Mach et d'iso-pression . Le choc bien qu'assez étalé a clairement la bonne inclinaison .

En axisymétrique le maillage obtenu à partir du maillage 2-D précédent n'est pas bien adapté et les résultats sont assez imprécis . Mais ils suffisent à démontrer la capacité de la méthode à positionner le choc correctement (figure 2.a et 2.b) .

1.1.2. Choc détaché

Dans une première série d'expériences , version 2-D , nous avons utilisé une quadrangulation quasi uniforme de taille moyenne : 41×41 points (figure 3.a) .

Les lignes d'iso-Mach dans le cas où $M_\infty = 8$ sont représentées figure 3.b .

On constate que les résultats sont lisses et monotones en particulier au voisinage du point d'arrêt , comme il est naturel pour un calcul à l'ordre 1 . Le choc est capturé en 2 ou 3 cellules , et la solution est constante en amont du choc .

figure 1.a
Maillage à 41×41 points d'une rampe à 20°

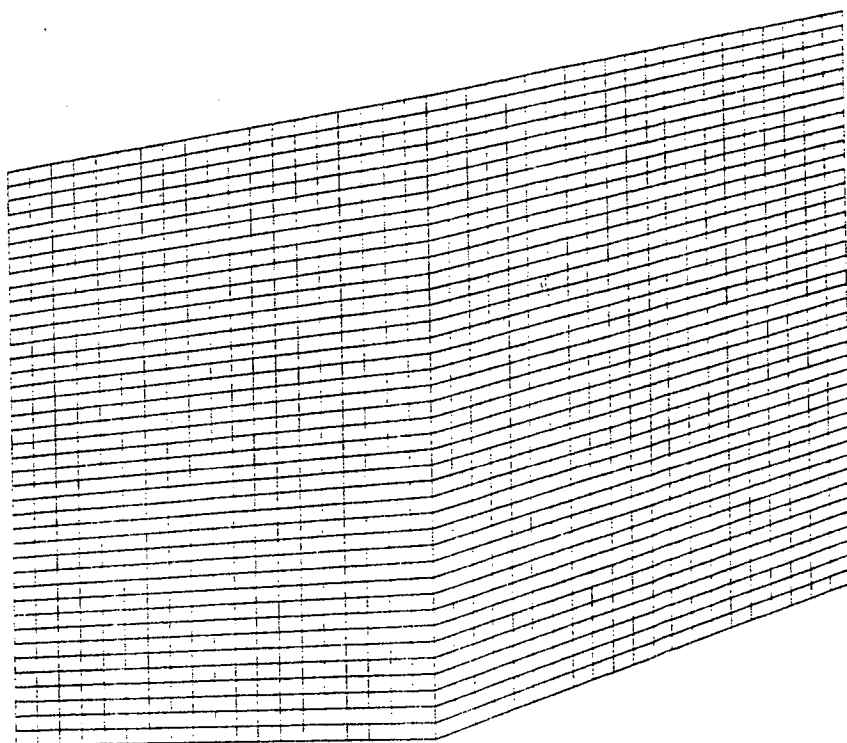
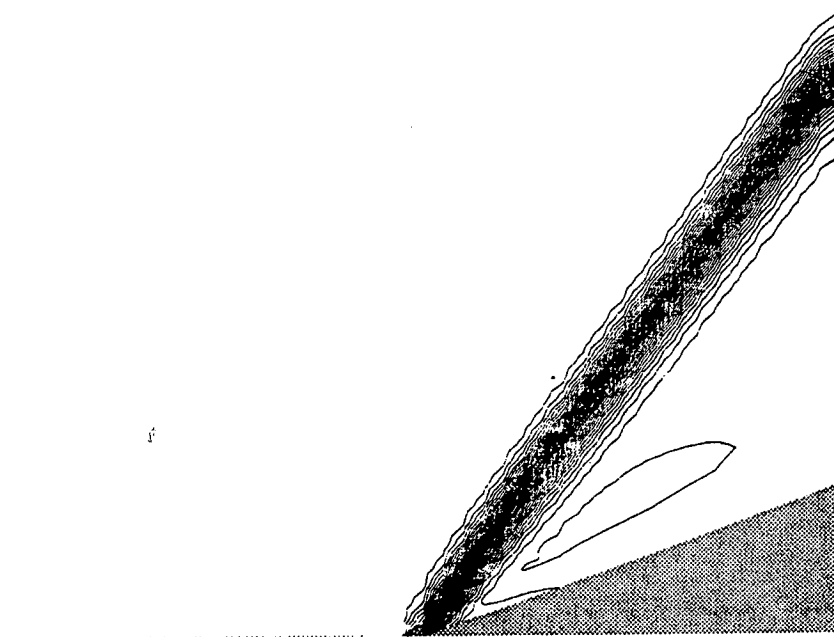


figure 1.b
Ecoulement supersonique d'un fluide parfait sur une rampe
lignes iso-mach ($M_{\infty} = 2$)



MACH

Max = 2.0

Min = 1.2

FREESTREAM MACH NUMBER = 2.0

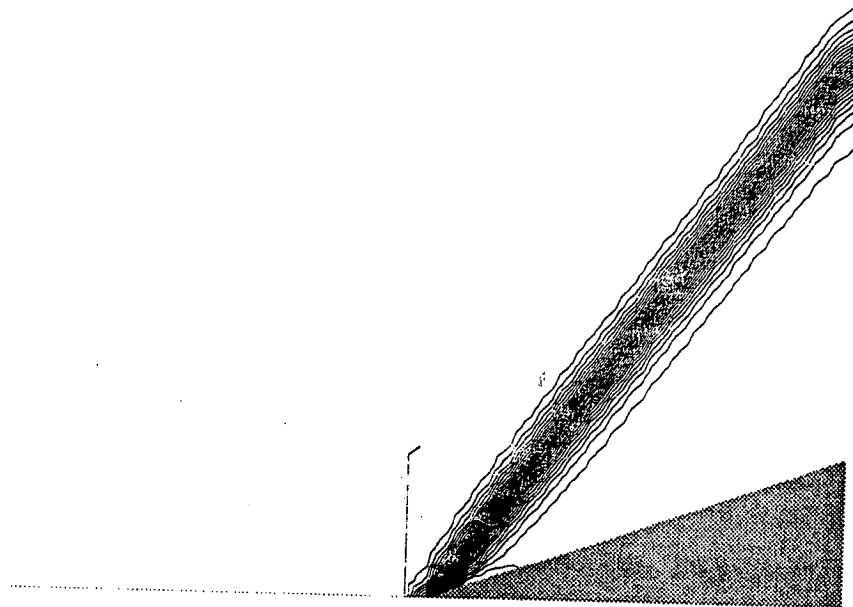
EULER WITH

SANS DISSOCIATION CHIMIQUE

FLUX VAN LEER

41 x 41 = 1681 gridpoints

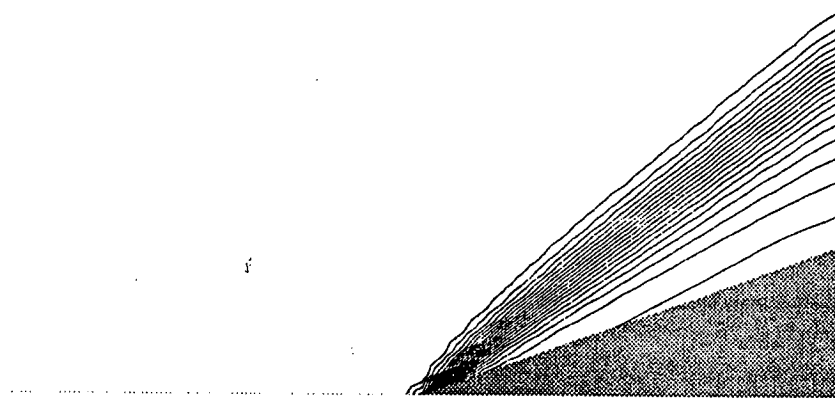
figure 1.c
Ecoulement supersonique d'un fluide parfait sur une rampe
lignes iso-pression ($M_\infty = 2$)



ISO-Cp
Max = 0.7
Min = 0.0
FREESTREAM MACH NUMBER = 2.0

EULER WITH
SANS DISSOCIATION CHIMIQUE
FLUX VAN LEER
41 x 41 = 1681 gridpoints

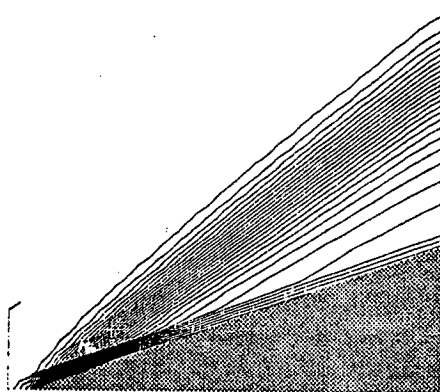
figure 2.a
 Ecoulement supersonique d'un fluide parfait sur un cône
 lignes iso-mach ($M_{\infty} = 2$)



MACH
 Max = 2.0
 Min = 1.6
FREESTREAM MACH NUMBER = 2.0

EULER WITH
SANS DISSOCIATION CHIMIQUE
FLUX : VAN LEER
 41 x 41 = 1681 gridpoints

figure 2.b
Ecoulement supersonique d'un fluide parfait sur un cône
lignes iso-pression ($M_\infty = 2$)



ISO-Cp

Max = 0.4

Min = 0.0

FREESTREAM MACH NUMBER = 2.0

EULER WITH

SANS DISSOCIATION CHIMIQUE

FLUX VAN LEER

41 x 41 = 1681 gridpoints

Les lignes d'iso-pression (figure 3.c) font apparaître une couche limite due à la viscosité numérique .

La convergence itérative est indiquée sur la figure 3.d . On a utilisé une méthode explicite avec un nombre de Courant (CFL) de 0.4 , et en 3000 itérations le résidu décroît d'environ 4 ordres de grandeur .

On a ensuite testé pour le même Mach à l'infini la version axisymétrique de l'algorithme dans le cas d'un maillage dont la section s'identifie au maillage 2-D de la figure 3.a .

Les lignes d'iso-Mach et d'iso-pression sont représentées sur les figures 3.e et 3.f .

On constate une réduction de la zone de choc (entre le choc et le corps) d'environ $0.3R_c$ où R_c est le rayon du corps . En conséquence le maillage initial est mal adapté à ce calcul . Néanmoins la résolution du choc est comparable .

Les lignes d'iso-Mach sont lisses , cependant on constate un défaut dans les lignes d'iso-pression puisque le maximum de pression n'est pas atteint au point d'arrêt mais sur un cercle autour de ce point . A ce jour ce phénomène numérique n'est pas encore élucidé . Ce calcul a été effectué à un $CFL=0.4$ et on constate sur la figure 3.g une grande vitesse de convergence en raison de la moindre étendue de la zone d'écoulement non uniforme , les degrés de liberté actifs ayant effectivement diminué .

Une comparaison 2-D , axisymétrique a été également réalisée dans le cas d'un régime à plus grand nombre de Mach à l'infini ($M_\infty = 25$) .

Dans le cas 2-D , la théorie classique de l'hypersonique prévoit une distance au choc de $1.4R_c$ (ref. Hayes - Probstein) et un maillage de 51×51 points a été construit sur cette base (figure 4.a) .

Les résultats : lignes d'iso-Mach , d'iso-pression et d'iso-température sont représentées sur les figures 4.b , 4.c et 4.d . Les solutions sont qualitativement comparables (solutions lisses et monotones) et la distance au choc est correctement estimée par cette méthode de calcul .

Dans le cas axisymétrique , un autre maillage de 51×51 points est utilisé , figure 5.a . Bien que s'étendant sur un domaine moins grand , il recouvre une zone environ deux fois plus grande que la zone de choc .

Les figures 5.b , 5.c et 5.d représentent les résultats . A nouveau les lignes d'iso-pression ont un défaut près du point d'arrêt .

figure 3.a
Maillage 41×41 points pour un cylindre

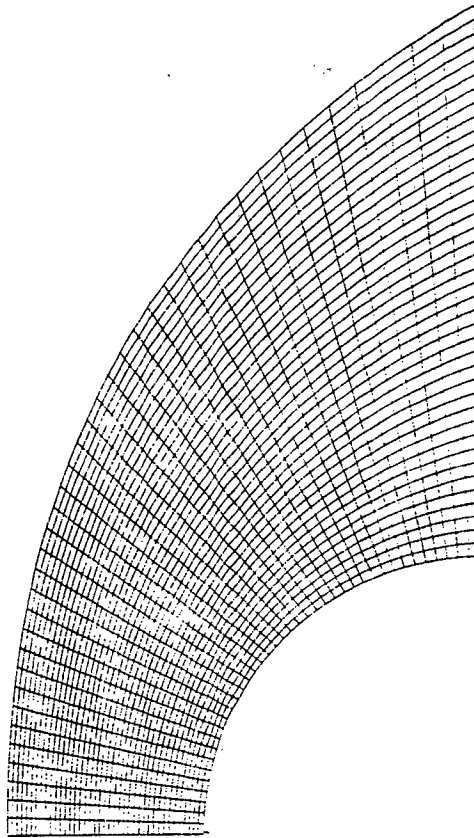
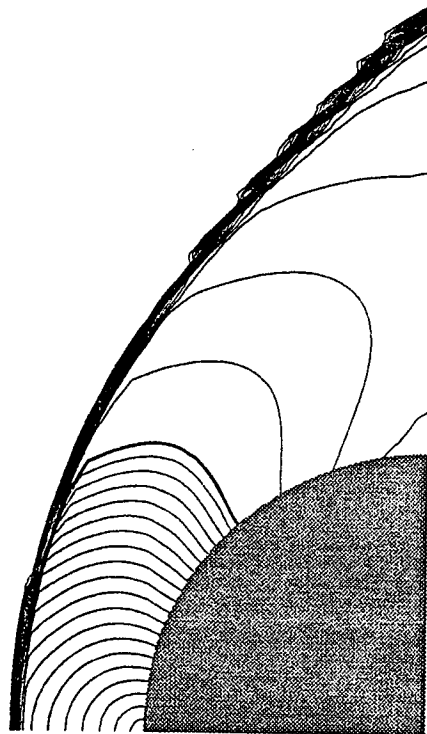


figure 3.b
Ecoulement hypersonique d'un fluide parfait sur un cylindre
lignes iso-mach ($M_{\infty} = 8$)



MACH

Max = 8.00

Min = 0.01

FREESTREAM MACH NUMBER = 8.0

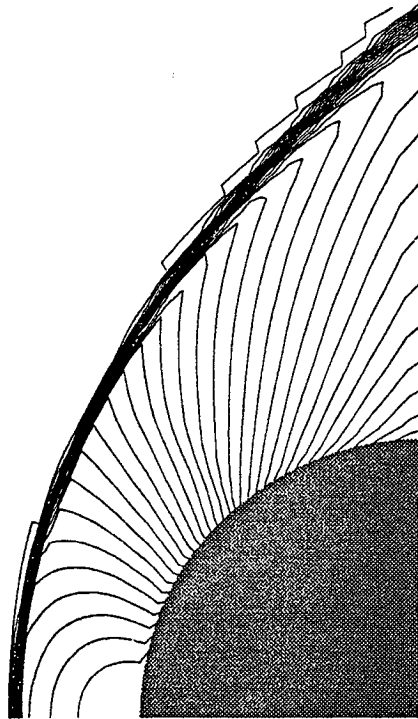
EULER WITH

SANS DISSOCIATION CHIMIQUE

FLUX VAN LEER

41 x 41 = 1681 gridpoints

figure 3.c
Ecoulement hypersonique d'un fluide parfait sur un cylindre
lignes iso-pression ($M_\infty = 8$)



ISO-Cp

Max = 1.87

Min = 0.00

FREESTREAM MACH NUMBER = 8.0

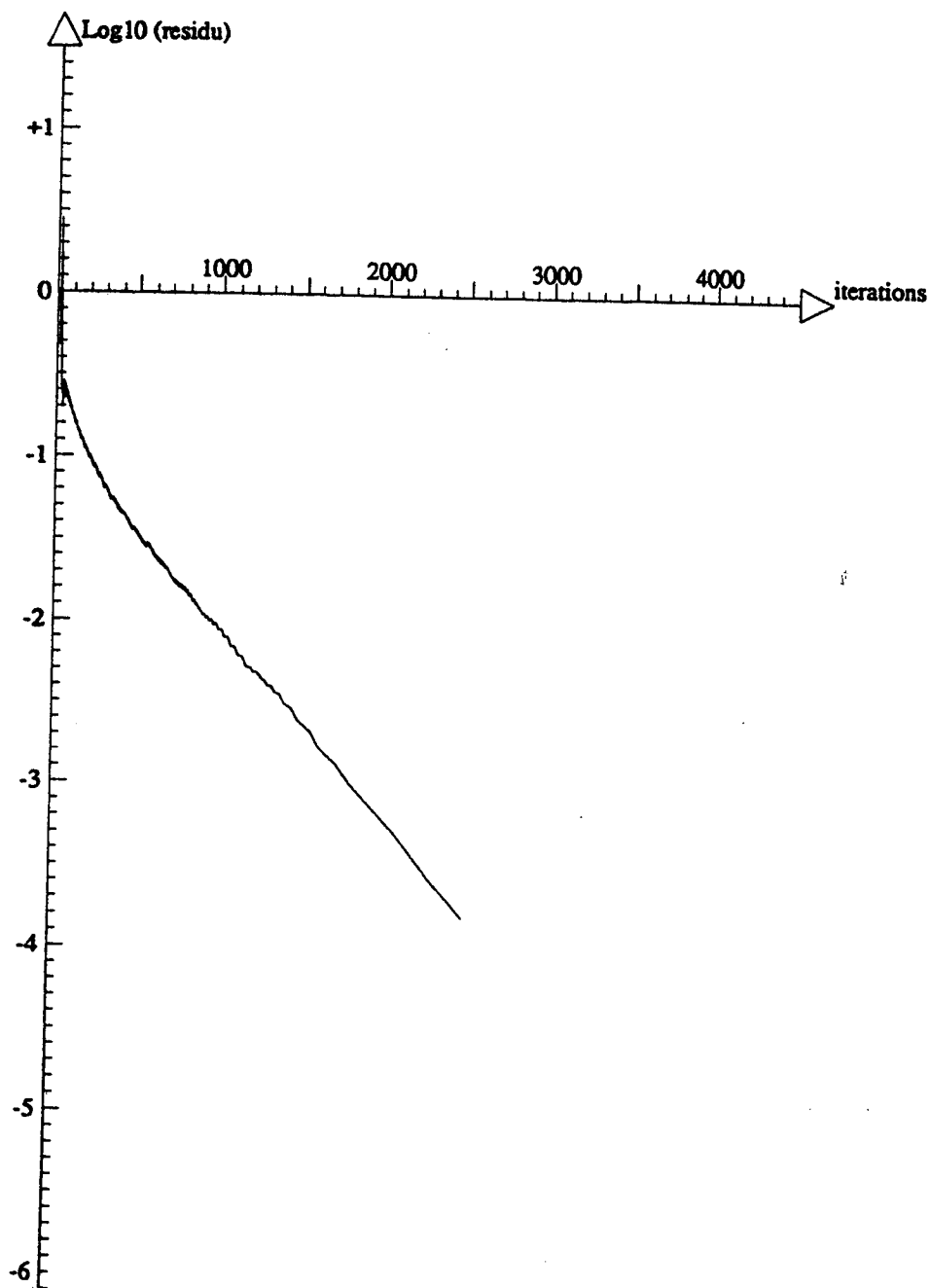
EULER WITH

SANS DISSOCIATION CHIMIQUE

FLUX VAN LEER

41 x 41 = 1681 gridpoints

figure 3.d
 Ecoulement hypersonique d'un fluide parfait sur un cylindre
 Convergence itérative ($CFL = 0.4$)



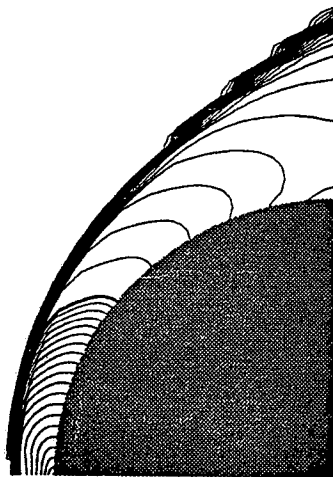
Max = 0.448

Min = -3.794

IV. TESTS NUMERIQUES

EULER WITH
 SANS DISSOCIATION CHIMIQUE
 FLUX VAN LEER
 41 x 41 = 1681 gridpoints
 FREESTREAM MACH NUMBER = 8.0

figure 3.e
Ecoulement hypersonique d'un fluide parfait sur une sphère
lignes iso-mach ($M_{\infty} = 8$)



MACH

Max = 8.00

Min = 0.04

FREESTREAM MACH NUMBER = 8.0

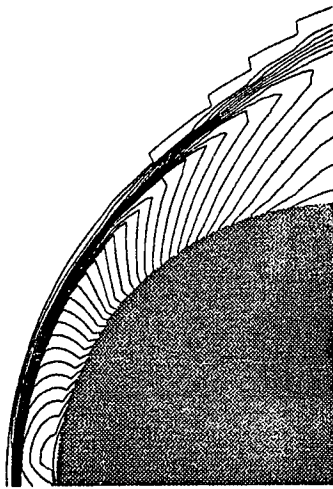
EULER WITH

SANS DISSOCIATION CHIMIQUE

FLUX VAN LÉER

41 x 41 = 1681 gridpoints

figure 3.f
Ecoulement hypersonique d'un fluide parfait sur une sphère
lignes iso-pression ($M_\infty = 8$)



ISO-Cp

Max = 1.87

Min = 0.00

FREESTREAM MACH NUMBER = 8.0

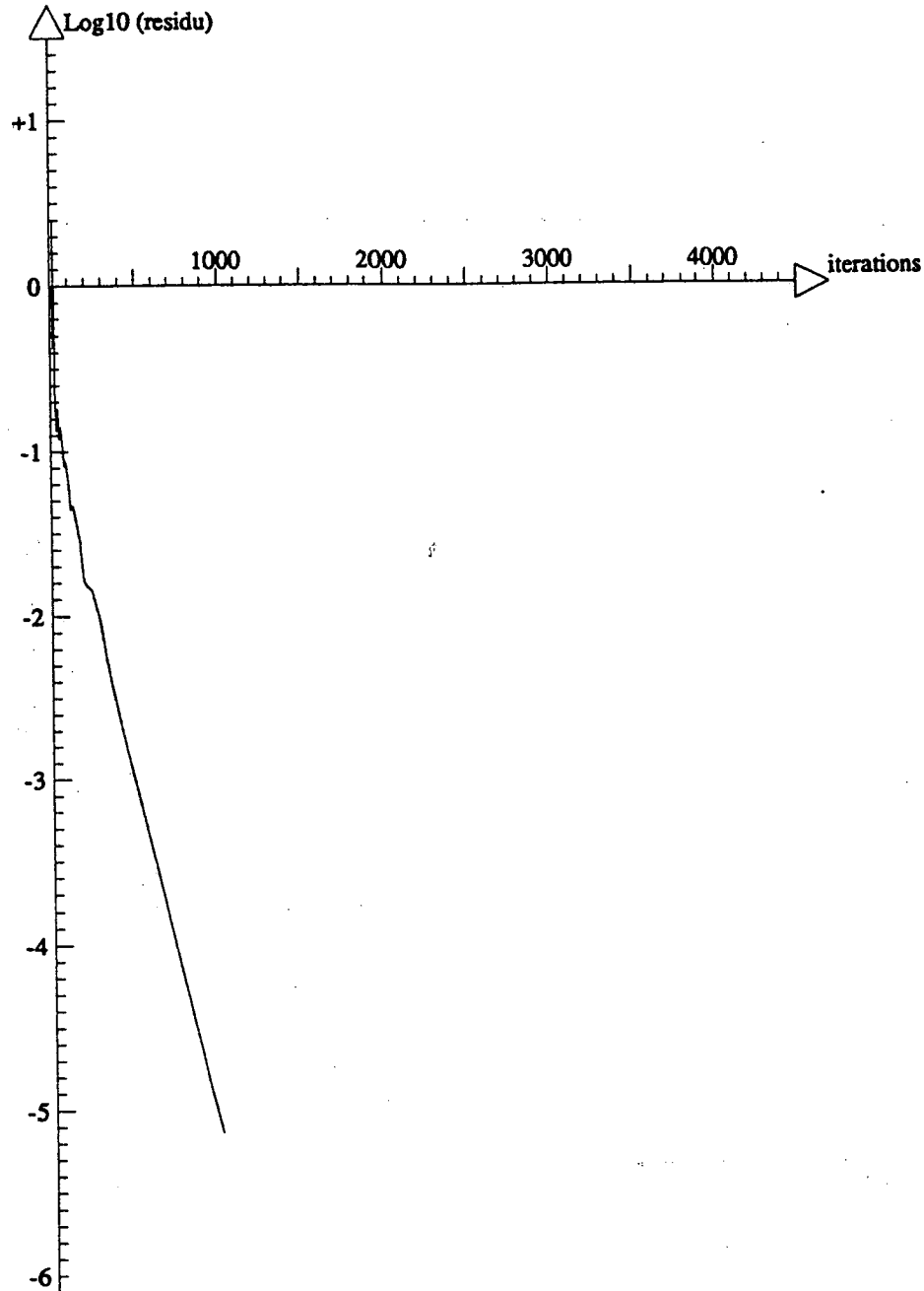
EULER WITH

SANS DISSOCIATION CHIMIQUE

FLUX VAN LEER

41 x 41 = 1681 gridpoints

figure 3.g
 Ecoulement hypersonique d'un fluide parfait sur une sphère
 Convergence itérative ($CFL = 0.4$)



Max = 0.398
 Min = -5.141

EULER WITH
 SANS DISSOCIATION CHIMIQUE
 FLUX VAN LEER
 41 x 41 = 1681 gridpoints
 FREESTREAM MACH NUMBER = 8.0

figure 4.a
Maillage 51×51 points pour un cylindre

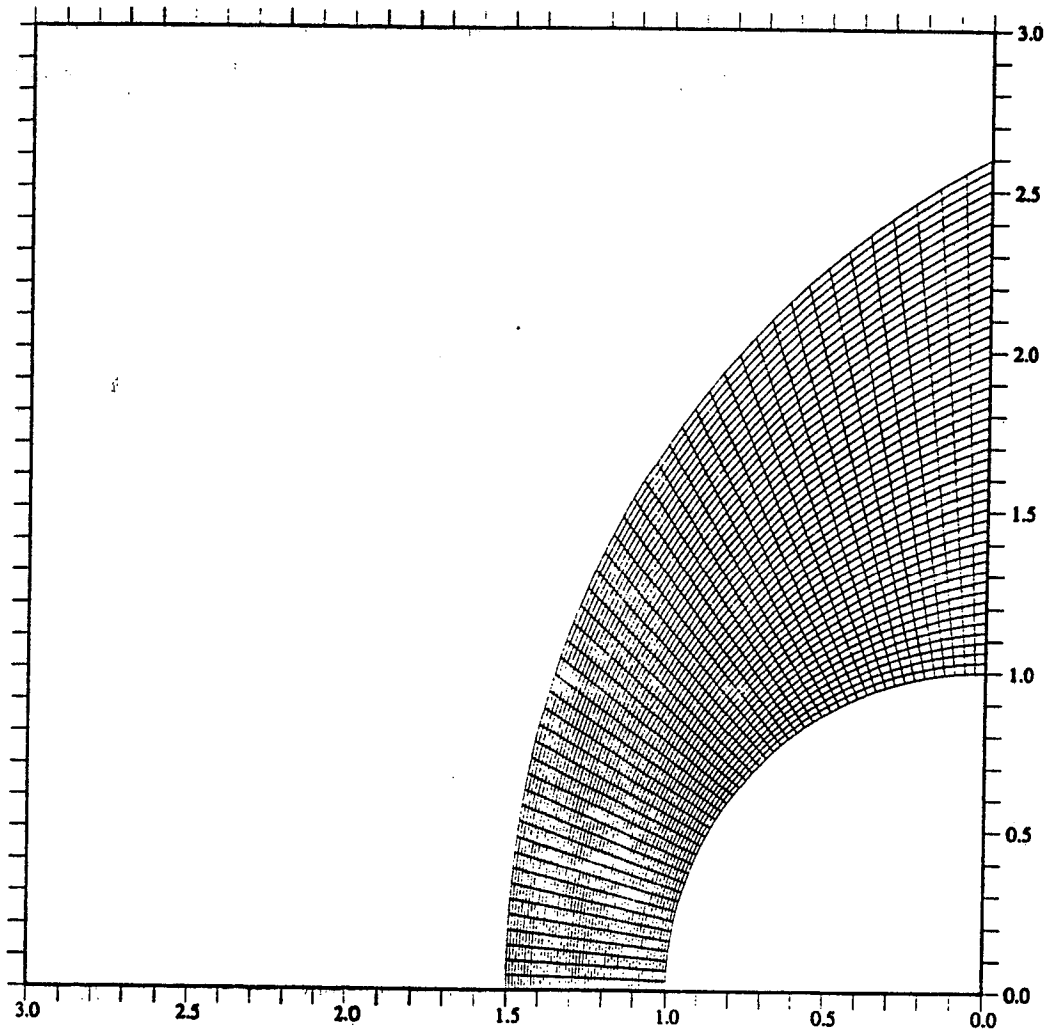
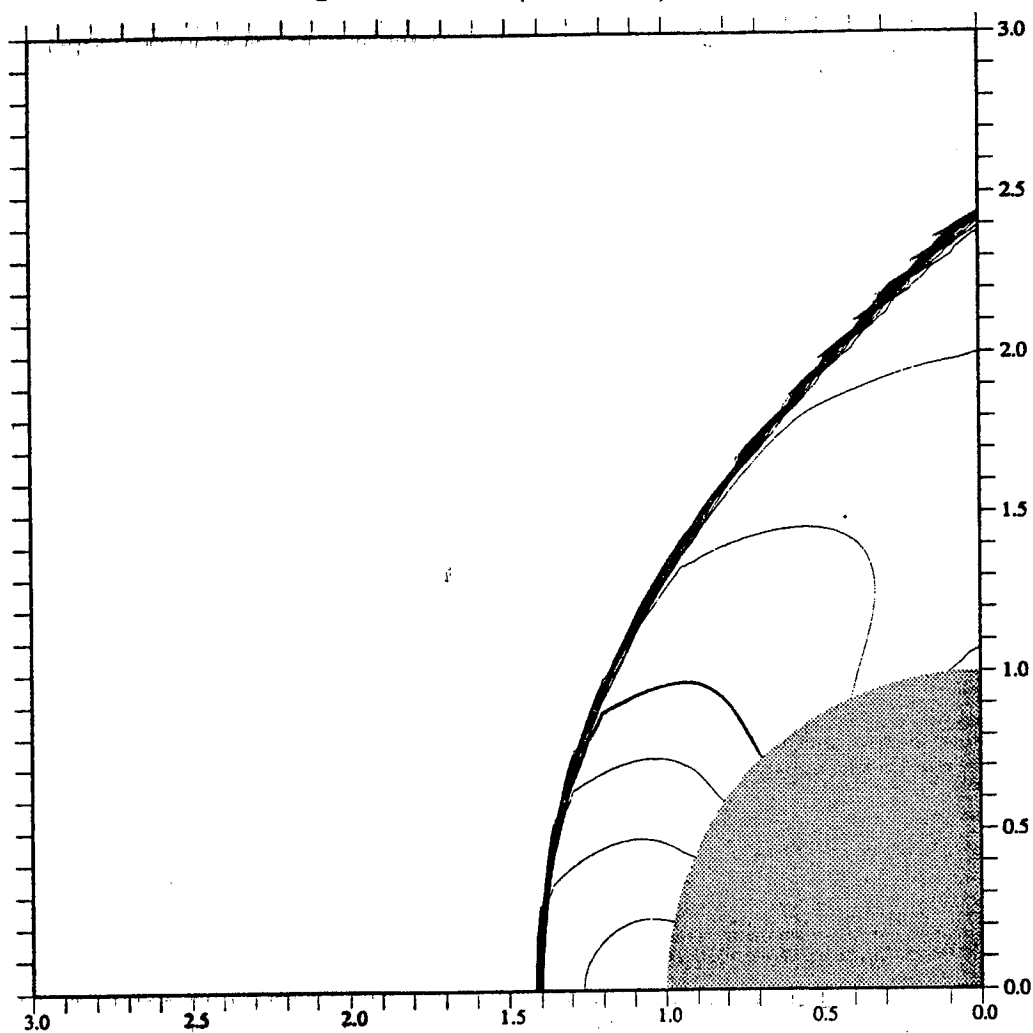


figure 4.b
Ecoulement hypersonique d'un fluide parfait sur un cylindre
lignes iso-mach ($M_\infty = 25$)



MACH

FREESTREAM MACH NUMBER = 25.0

IV. TESTS NUMERIQUES

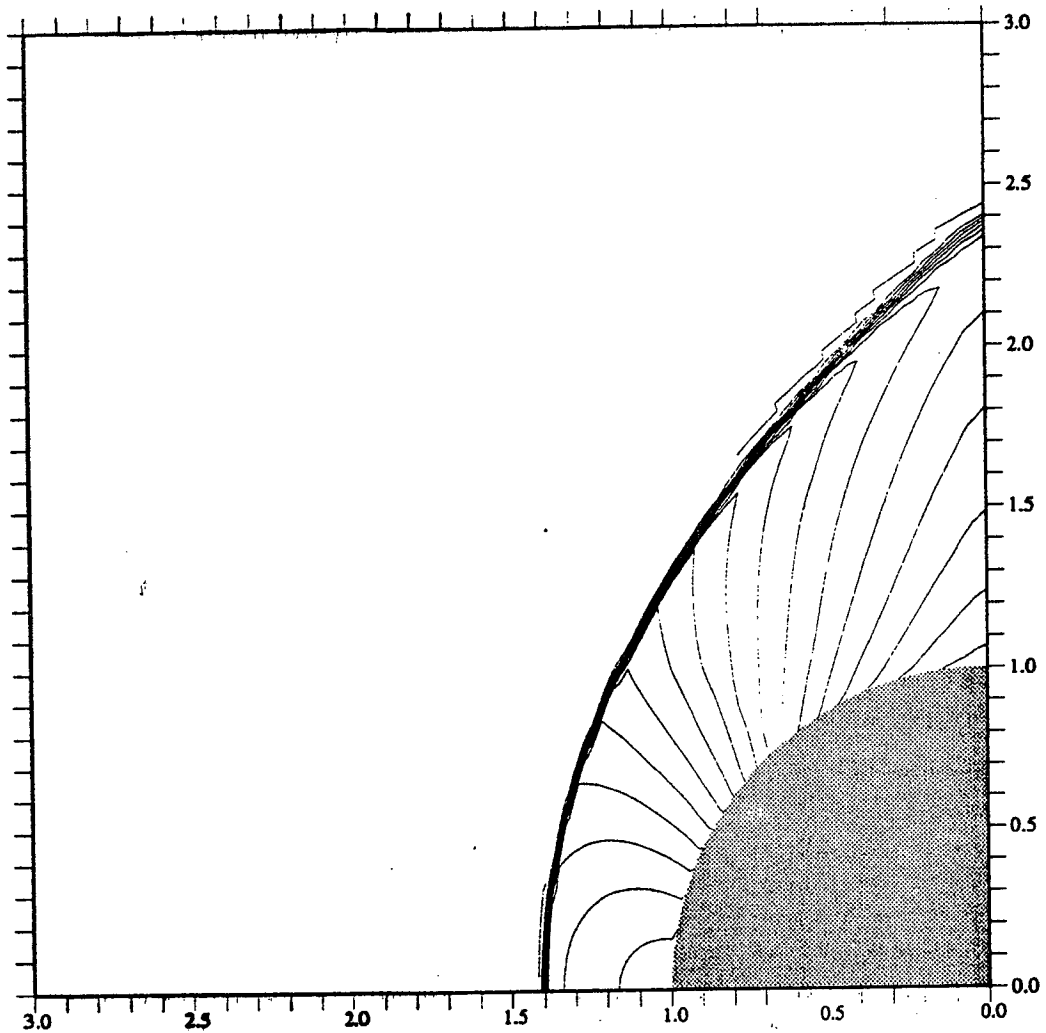
ECOULEMENT EULER

SANS DISSOCIATION CHIMIQUE

FLUX VAN LEER ORDRE 1

51 x 51 = 2601 gridpoints

figure 4.c
Ecoulement hypersonique d'un fluide parfait sur un cylindre
lignes iso-pression ($M_\infty = 25$)

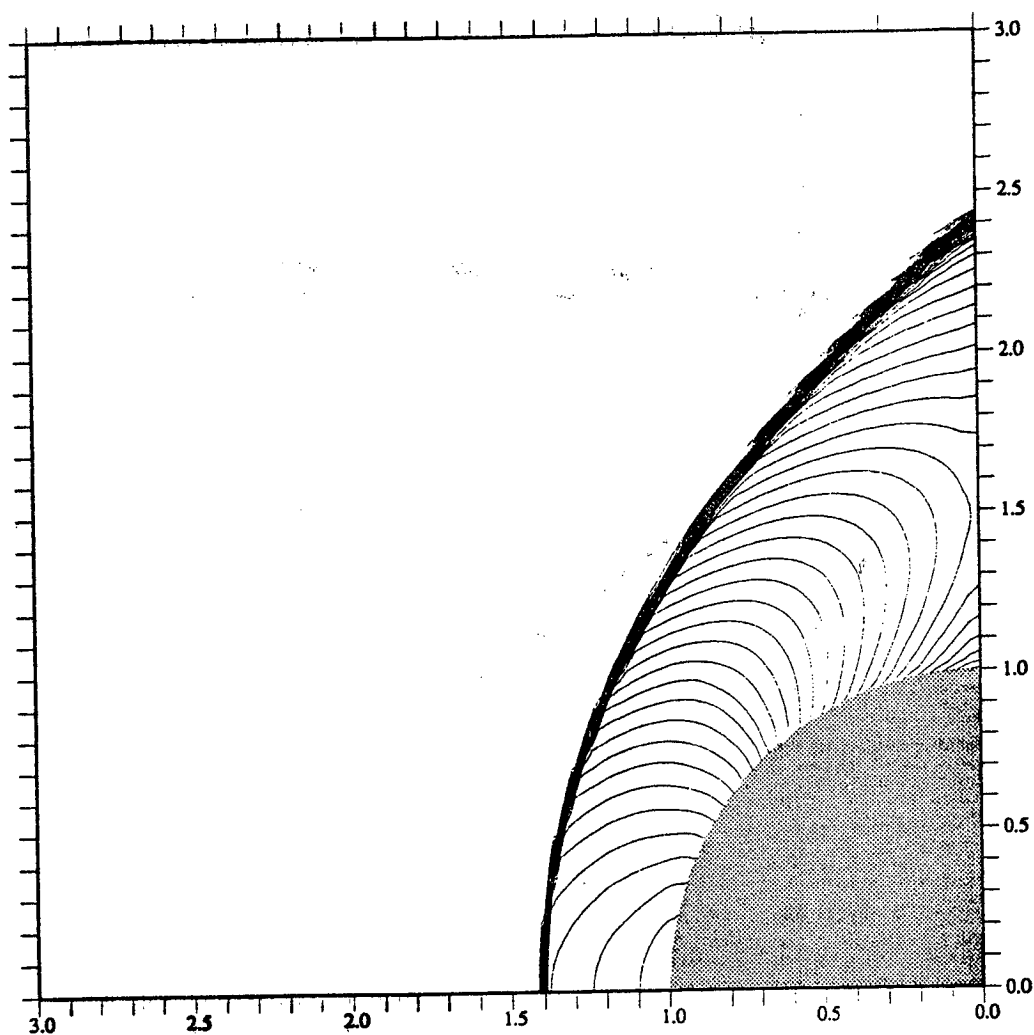


Kp min 0.000
 Kp max 1,870

FREESTREAM MACH NUMBER = 25.0
IV. TESTS NUMERIQUES

ECOULEMENT EULER
SANS DISSOCIATION CHIMIQUE
FLUX VAN LEER ORDRE 1
 51 x 51 = 2601 gridpoints

figure 4.d
Ecoulement hypersonique d'un fluide parfait sur un cylindre
lignes iso-température ($M_\infty = 25$)



Temperature inf 215.6 K
 Temperature max 27981.3 K

TEMPERATURE

ECOULEMENT EULER

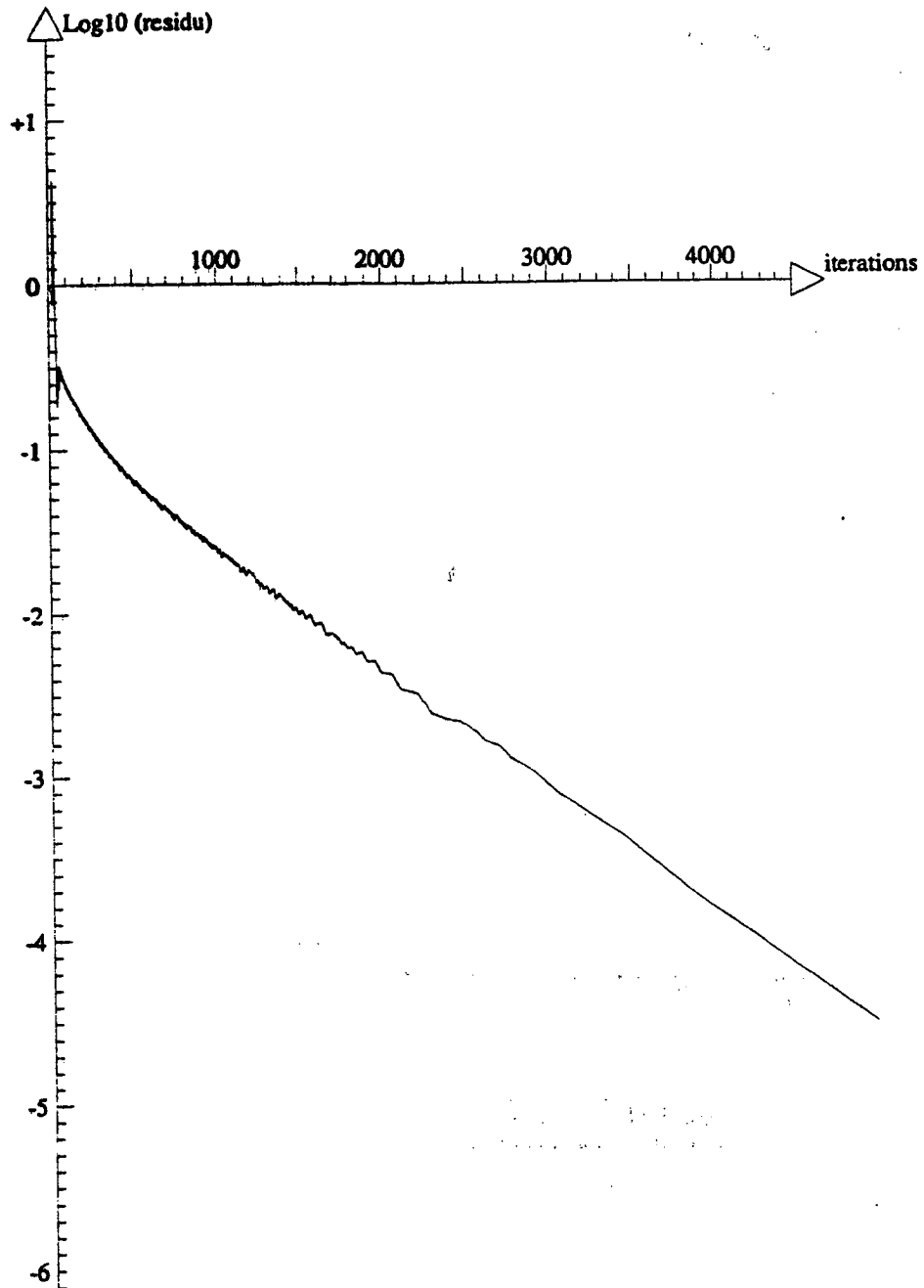
FREESTREAM MACH NUMBER = 25.0

SANS DISSOCIATION CHIMIQUE
 FLUX VAN LEER ORDRE 1

IV. TESTS NUMERIQUES

51 x 51 = 2601 gridpoints

figure 4.e
Ecoulement hypersonique d'un fluide parfait sur un cylindre
Convergence itérative ($CFL = 0.6$)



CFL = 0.600

Max = 0.634

Min = -4.512

IV. TESTS NUMERIQUES

ECOULEMENT EULER
SANS DISSOCIATION CHIMIQUE

FREESTREAM MACH NUMBER = 25.0

figure 5.a
Maillage 51×51 points pour une sphère

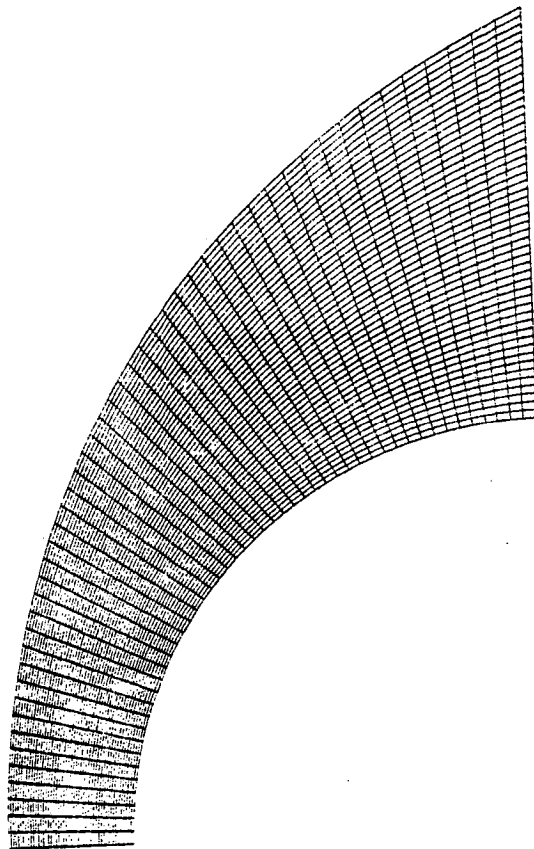
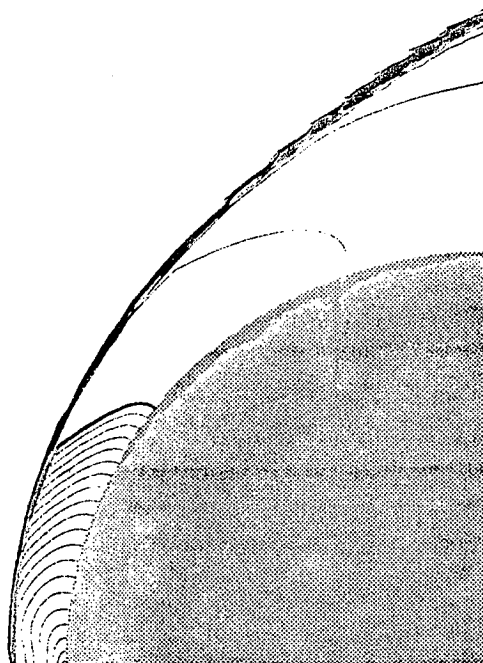


figure 5.b
Ecoulement hypersonique d'un fluide parfait sur une sphère
 lignes iso-mach ($M_{\infty} = 25$)



MACH

Max = 25.00

Min = 0.02

FREESTREAM MACH NUMBER = 25.0

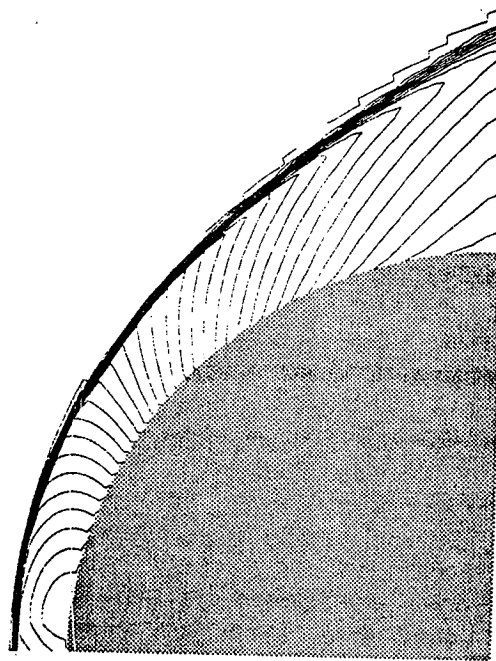
EULER WITH

SANS DISSOCIATION CHIMIQUE

FLUX VAN LEER

51 x 51 = 2601 gridpoints

figure 5.c
Ecoulement hypersonique d'un fluide parfait sur une sphère
lignes iso-pressure ($M_\infty = 25$)



ISO-Cp

Max = 1.87

Min = 0.00

FREESTREAM MACH NUMBER = 25.0

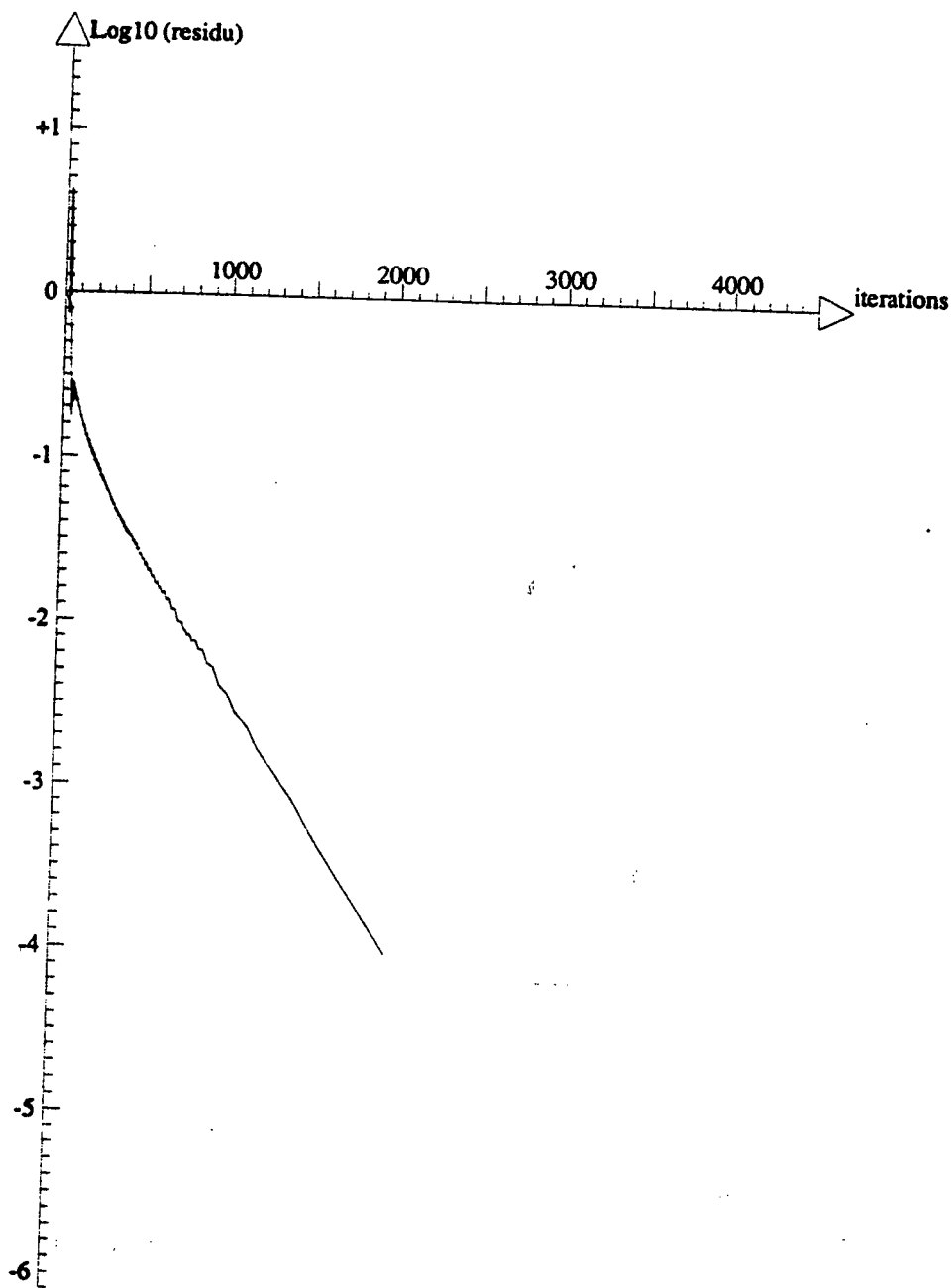
EULER WITH

SANS DISSOCIATION CHIMIQUE

FLUX VAN LEER

51 x 51 = 2601 gridpoints

figure 5.d
 Écoulement hypersonique d'un fluide parfait sur une sphère
 Convergence itérative ($CFL = 0.4$)



Max = 0.630
 Min = -4.005

EULER WITH
 SANS DISSOCIATION CHIMIQUE
 FLUX VAN LEER
 51 x 51 = 2601 gridpoints
 FREESTREAM MACH NUMBER = 25.0

La convergence itérative est plus grande qu'en 2-D .

1.2. *Application : jet supersonique dans une chambre de combustion*

Il s'agit ici de simuler l'écoulement hydrodynamique dans une chambre à combustion axisymétrique . Le jet entre dans la chambre à un nombre de Mach égal à 1.1 par une ouverture circulaire centrée sur l'axe de révolution de la chambre . Les conditions d'expérience sont représentées sur la figure 6.a .

La figure 6.b représente le maillage de la section génératrice de la chambre . Les résultats obtenus sont représentés sur les figures 6.c et 6.d . Sur les lignes d'iso-Mach (figure 6.c) on observe une distorsion qui semble suivre les ligne de maillage depuis le bord de l'ouverture . A ce jour cette singularité qui est probablement d'origine numérique n'a pas encore obtenue d'explication .

2. **Ecoulement de gaz réactif à l'équilibre chimique**

Ici on a effectué une série de calcul d'écoulements autour d'une sphère (géométrie axisymétrique) . On compare l'écoulement de fluide parfait ($\gamma = 1.4$) à l'écoulement de gaz réactif à l'équilibre chimique . Le modèle chimique est celui décrit dans [2-3] , où ici , l'énergie de vibration n'est pas prise en compte .

Dans une première expérience où $M_\infty = 15$, on utilise un maillage de 51×51 points (figure 7.a) pour comparer l'écoulement axisymétrique de fluide parfait à celui du gaz réactif à l'équilibre chimique.

Les solutions obtenues sont indiquées sur les figures 7.b à 7.d pour le gaz parfait et les figures 7.f à 7.h pour l'écoulement réactif. On constate la réduction de la zone de choc atteint presque 50% comme en 2-D.

Les coupes de Mach et de température sont représentées par la figure 7.k . On constate que la dissociation chimique a pour effet de réduire la température maximale au point d'arrêt de plus de 50%.

On donne la répartition des fractions massiques en fonction de x sur la figure 7.m. L'oxygène est quasiment complètement dissocié. L'échange s'effectue entre N_2 et N principalement.

Enfin on remarque sur les figures 7.g et 7.n que la convergence itérative est plus rapide pour l'écoulement réactif, à cause du plus grand nombre de points où la solution n'a aucun gradient .

En résumé, ces résultats de comparaison fluide inerte/fluide réactif à l'équilibre permettent des conclusions qualitatives comparables à celles déjà obtenues dans le cas 2-D [3].

Cependant, on constate dans cas axisymétrique, qu'un léger défaut de monotonie apparaît dans la répartition de la pression et de la densité dans le voisinage du point d'arrêt. Afin d'explorer cette question, et notamment de vérifier que ce défaut s'atténue par raffinement de maillage, on a également conduit une série d'expériences avec des maillages plus fins près du point d'arrêt .

Dans une première expérience (figure 8), le maillage contient 101×51 points et il est uniforme le long du corps. L'amélioration est peu sensible.

Dans une seconde expérience (figure 9), le maillage contient le même nombre de points mais ceux-ci sont plus concentrés près du point d'arrêt. On constate une amélioration plus nette de la répartition de la pression, alors que la répartition de la densité présente toujours un défaut visible.

On conclut que pour un écoulement hypersonique axisymétrique, la convergence de l'approximation nécessite un effort important de raffinement de maillage.

Enfin, dans le but de démontrer la robustesse de l'algorithme numérique, on a calculé l'écoulement réactif à l'équilibre à $M_\infty = 25$ (figure 10). On n'a pas observé de difficulté numérique particulière pour obtenir ce résultat (CFL=0.4).

figure 6.a
Maillage 41×41 points pour une chambre

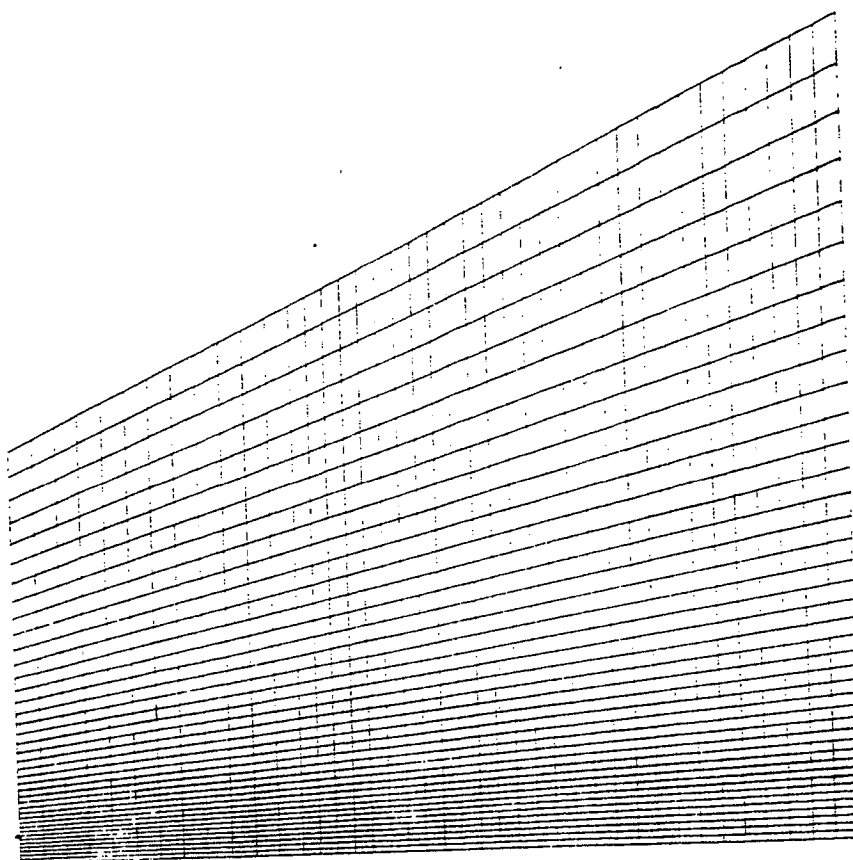
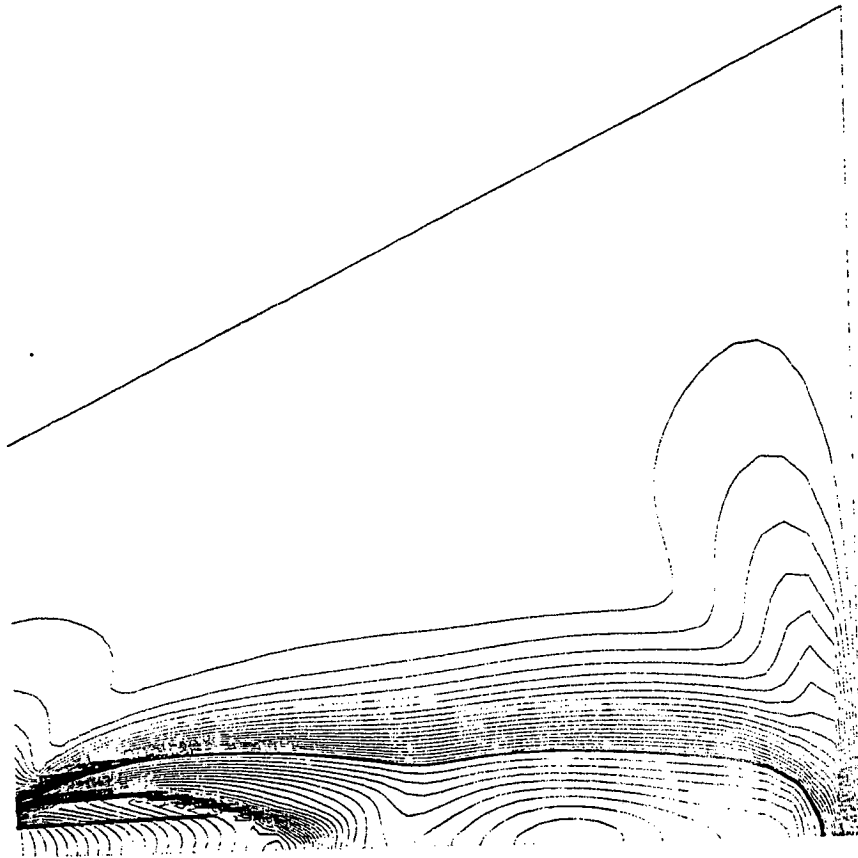


figure 6.b
Jet supersonique dans une chambre de combustion
Lignes iso-mach ($M_{in} = 1.1$)



Max = 4.2
Min = 0.0

figure 6.c
Jet supersonique dans une chambre de combustion
Vitesse ($M_{in} = 1.1$)

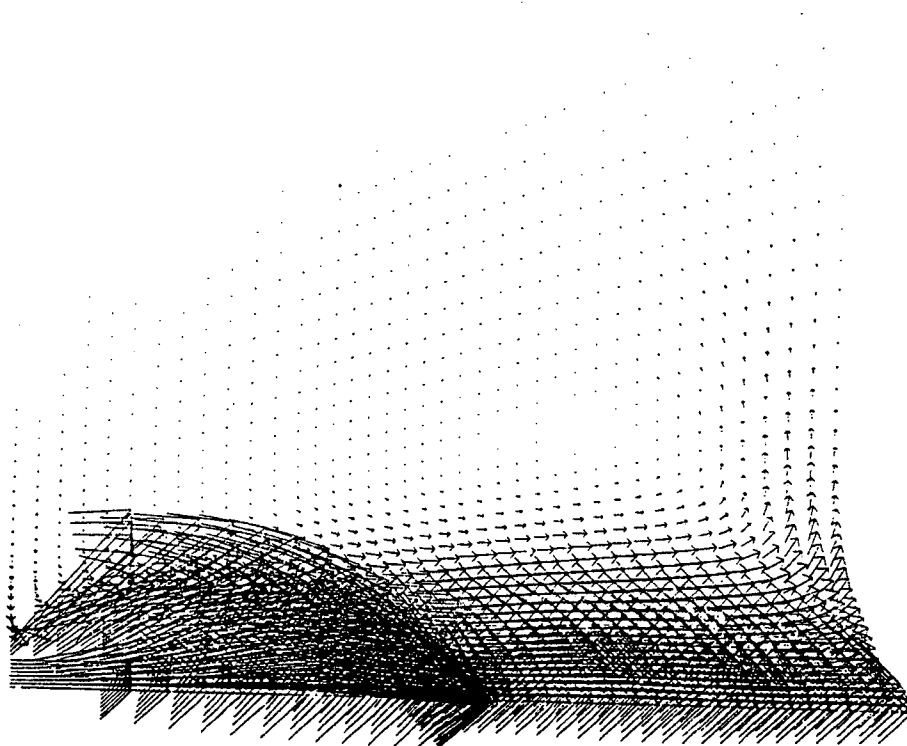


figure 6.d
Jet supersonique dans une chambre de combustion
Convergence itérative $CFL = 0.4$

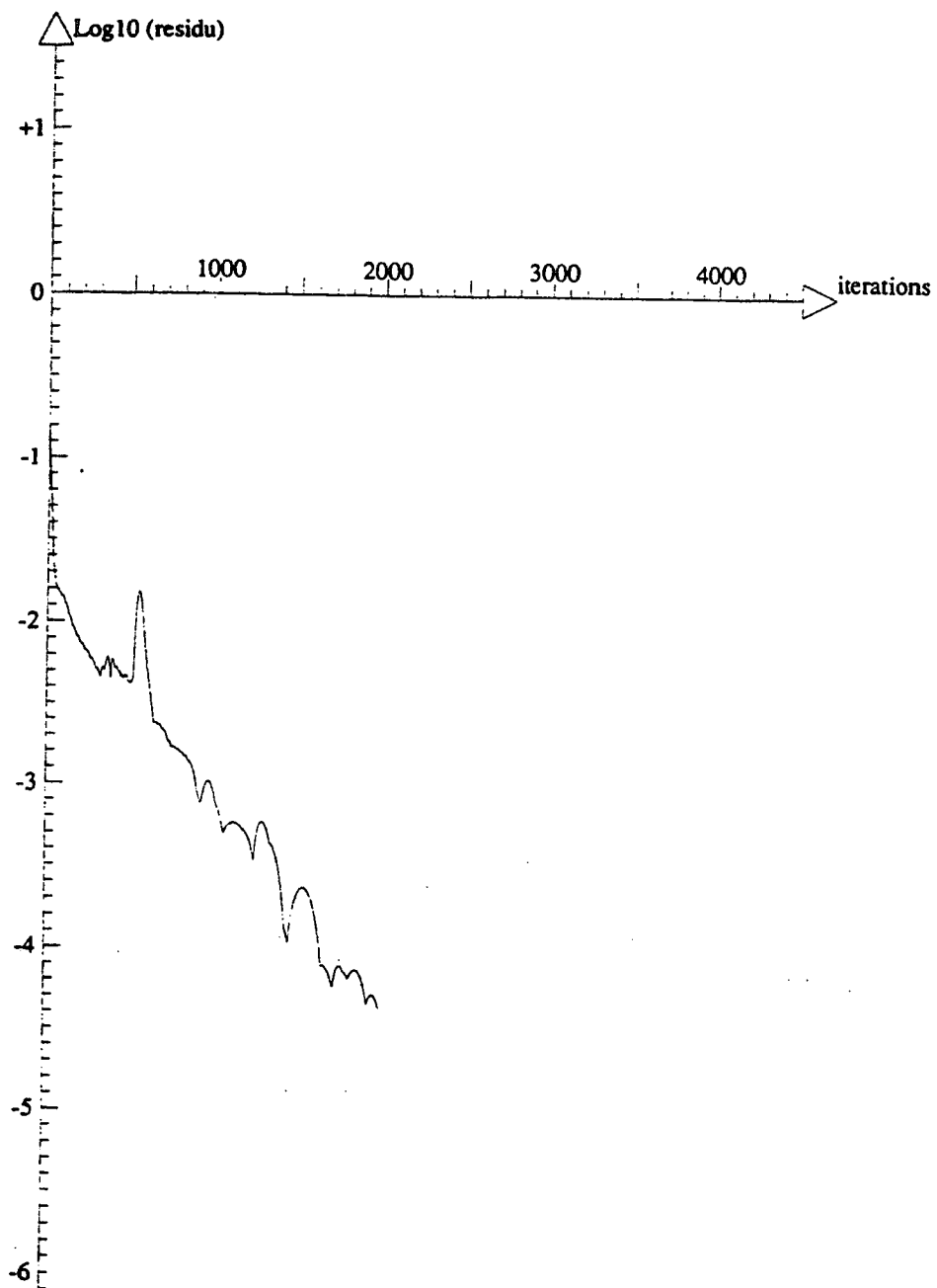


figure 7.a
Maillage 51×51 points pour une sphère

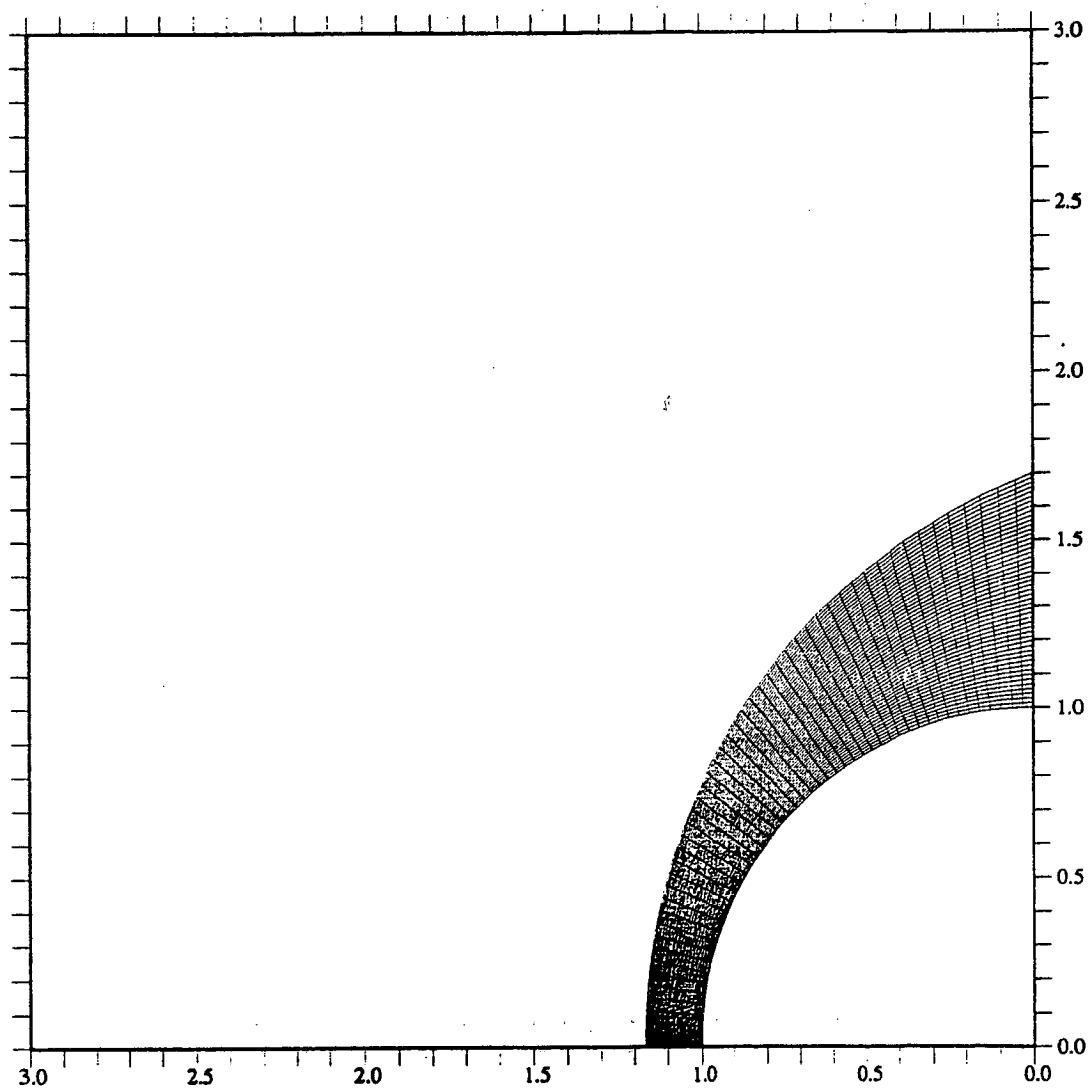


figure 7.b
Comparaison d'écoulements hypersoniques sur une sphère ($M_\infty = 15$)
lignes iso-mach : fluide parfait

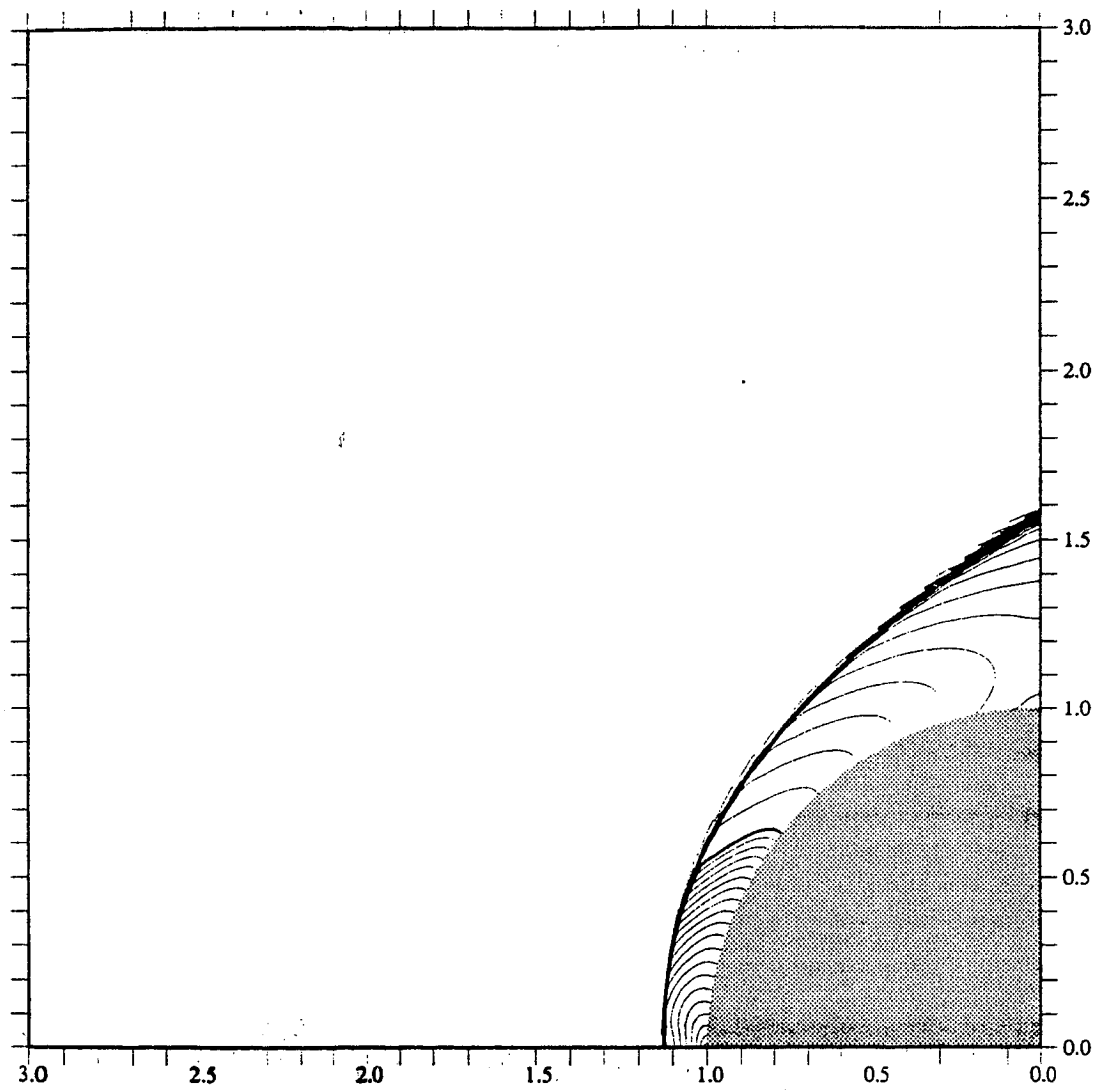
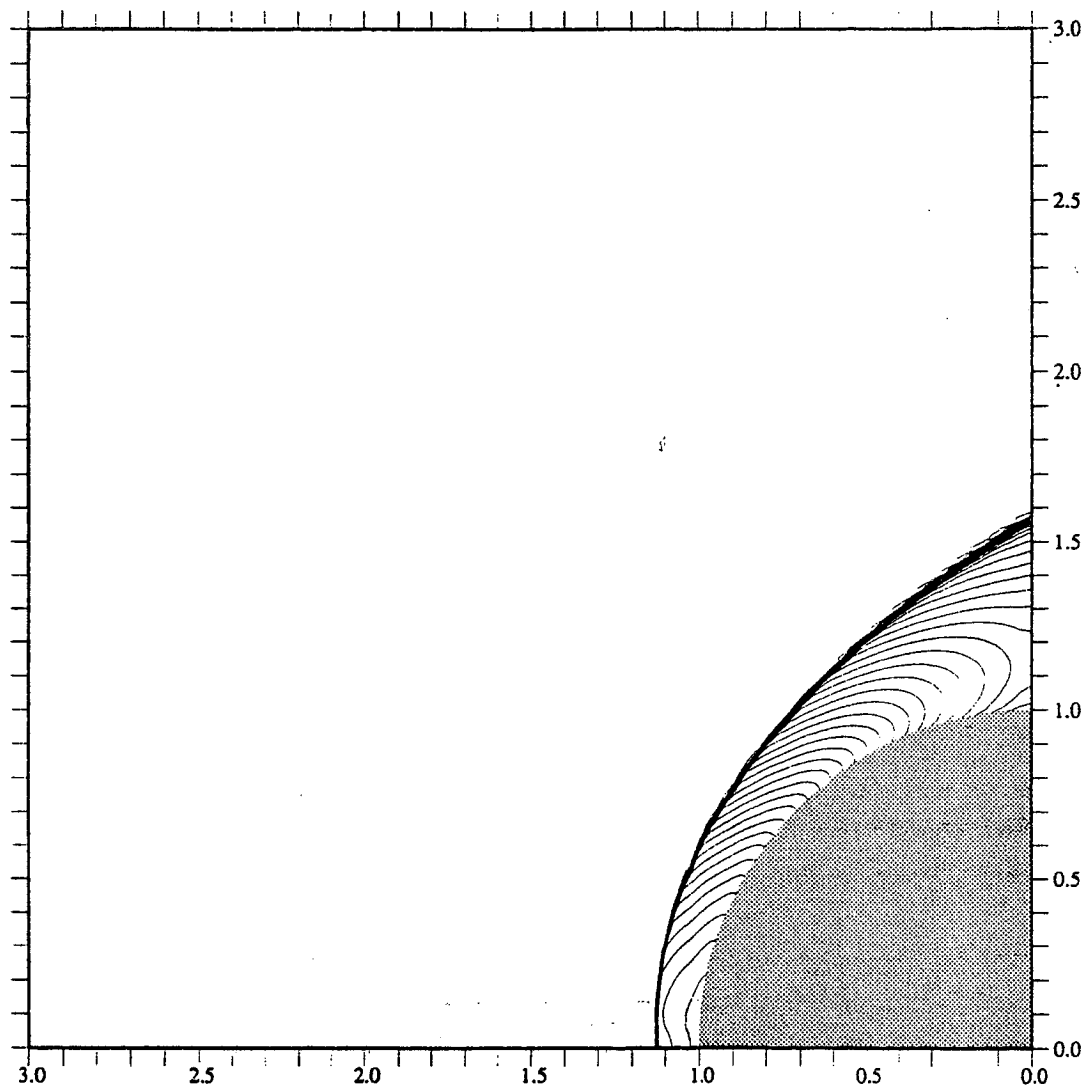
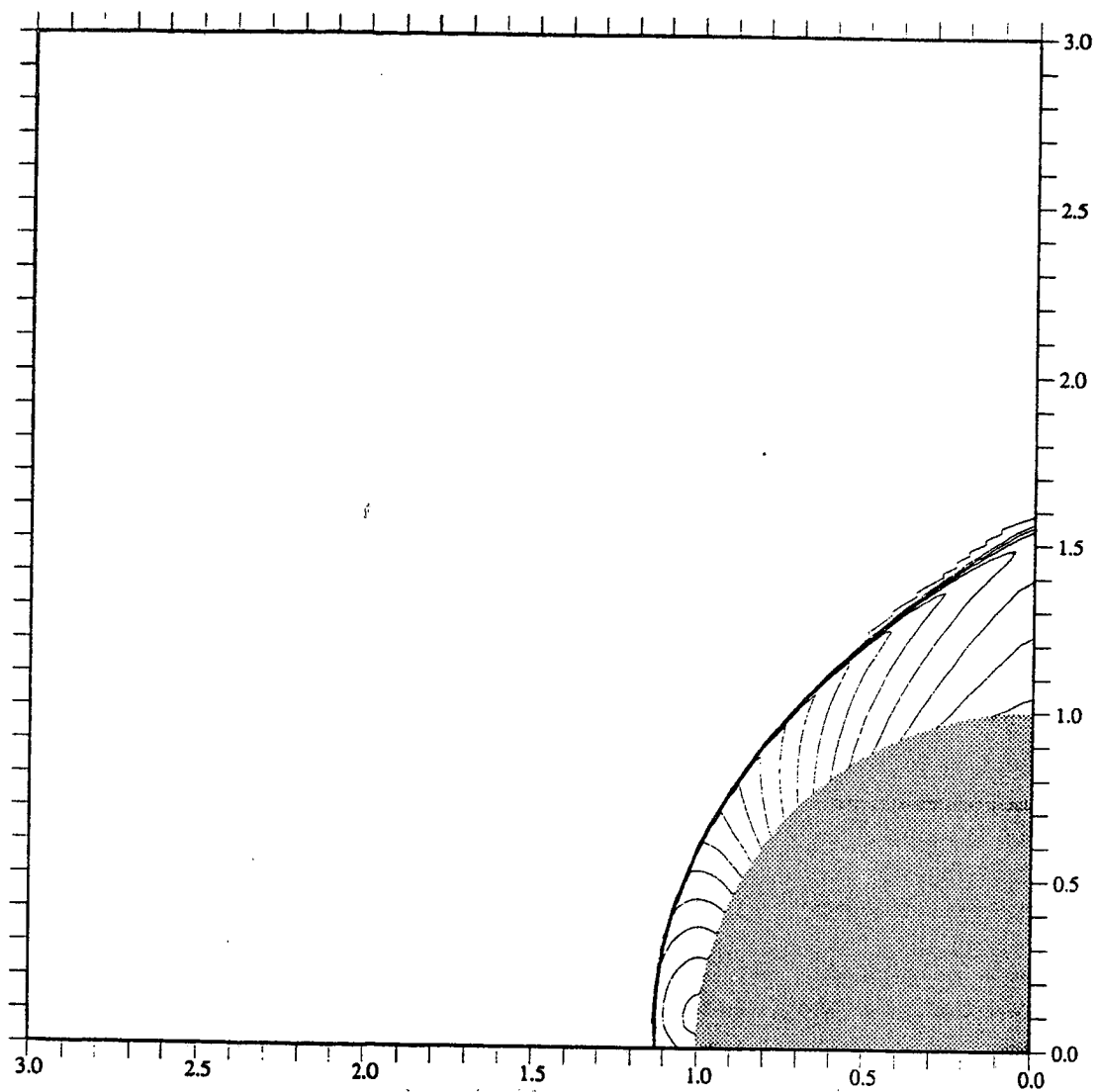


figure 7.c
Comparaison d'écoulements hypersoniques sur une sphère ($M_\infty = 15$)
lignes iso-température : fluide parfait



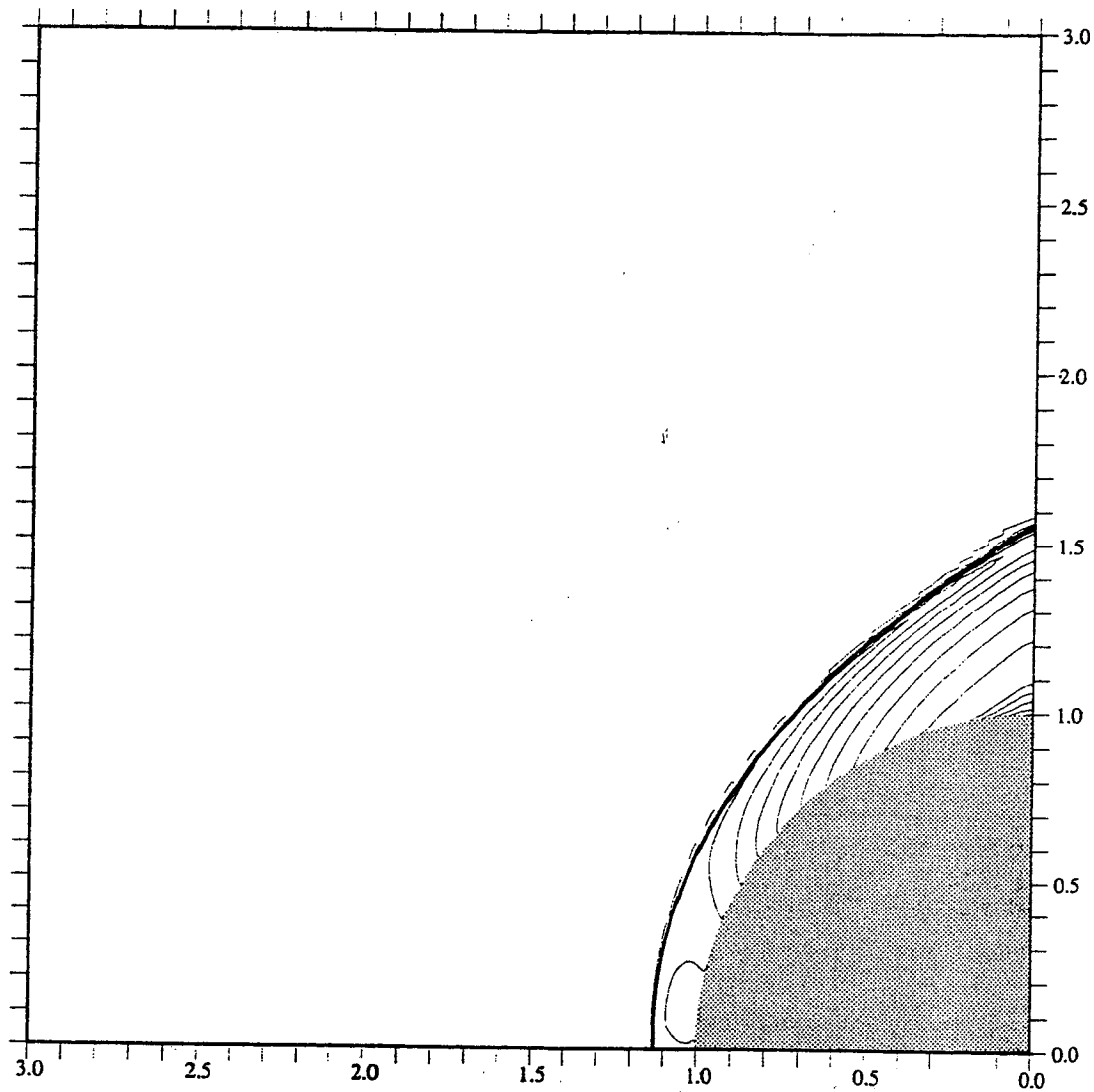
Temperature inf 239.3 K
Temperature max 11242.7 K

figure 7.d
 Comparaison d'écoulements hypersoniques sur une sphère ($M_\infty = 15$)
 lignes iso-pression : fluide parfait



Kp min 0.000
 Kp max 1.859

figure 7.e
Comparaison d'écoulements hypersoniques sur une sphère ($M_\infty = 15$)
lignes iso-densité : fluide parfait



Density min 0.576
Density max 6.267

figure 7.f
 Comparaison d'écoulements hypersoniques sur une sphère ($M_\infty = 15$)
 Coupes de nombre de Mach et de température : fluide parfait

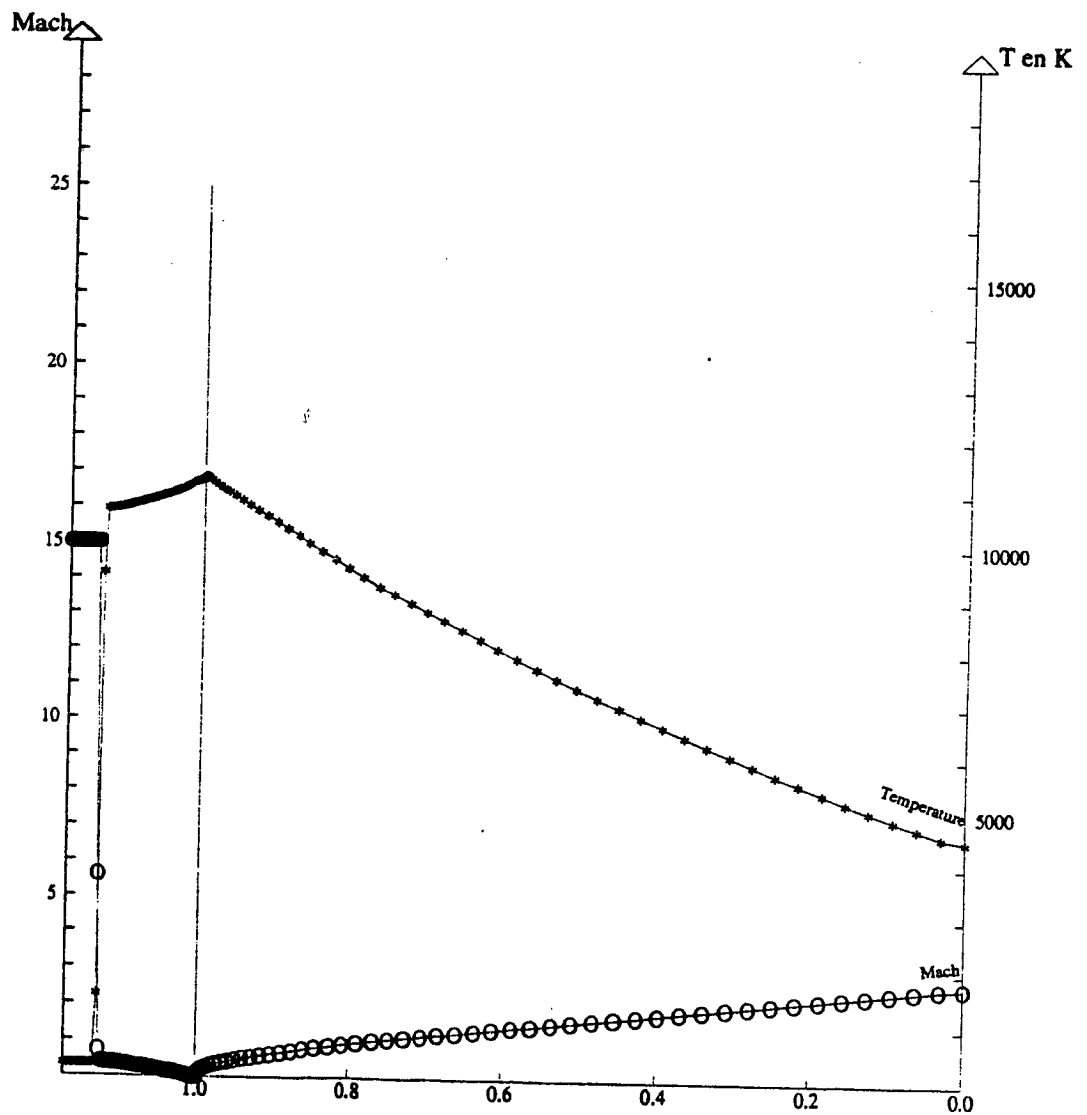


figure 7.g
 Comparaison d'écoulements hypersoniques sur une sphère ($M_\infty = 15$)
 Convergence itérative: fluide parfait, $CFL = 0.4$

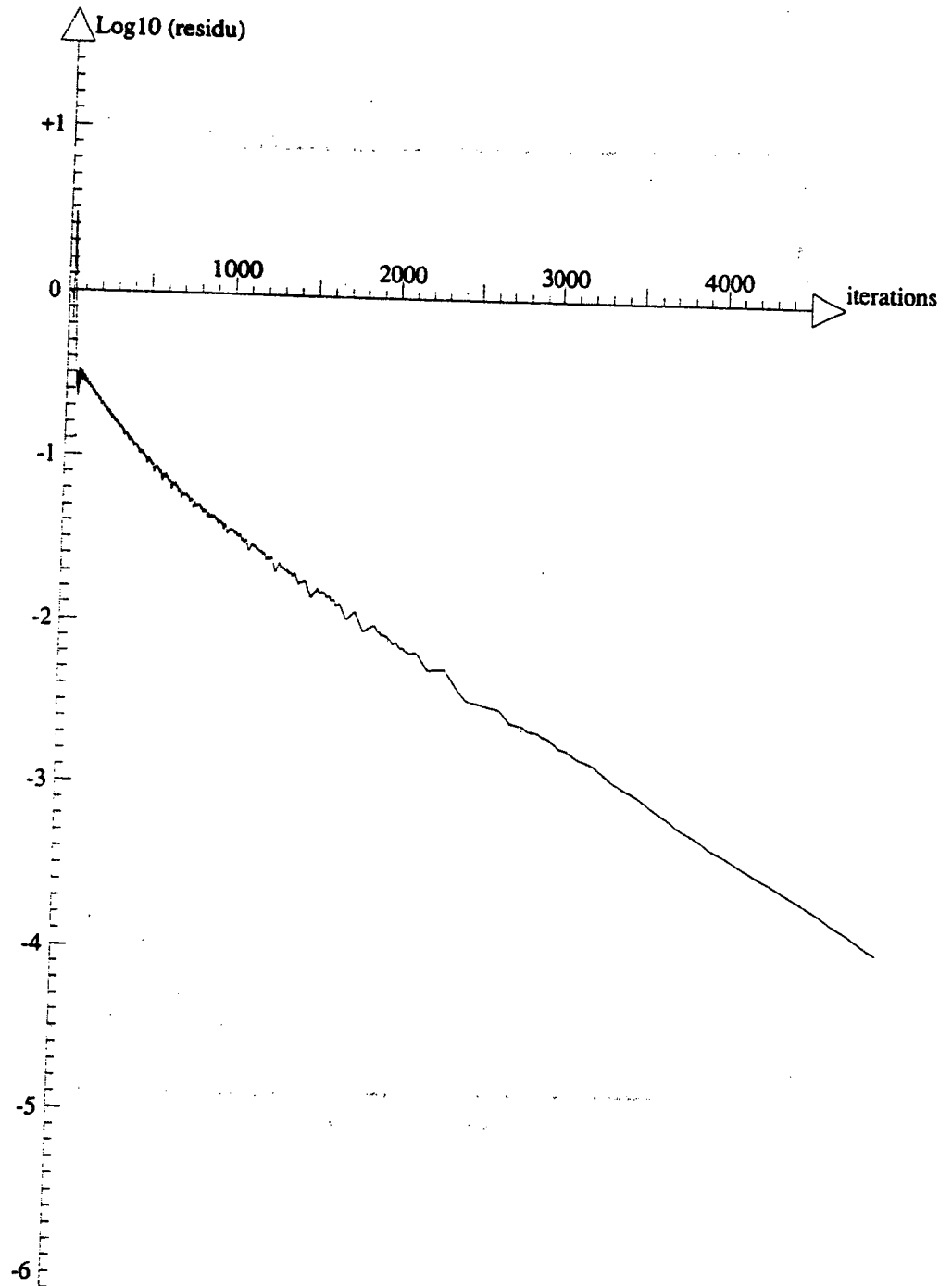


figure 7.h
Comparaison d'écoulements hypersoniques sur une sphère ($M_\infty = 15$)
lignes iso-mach : gaz réactif

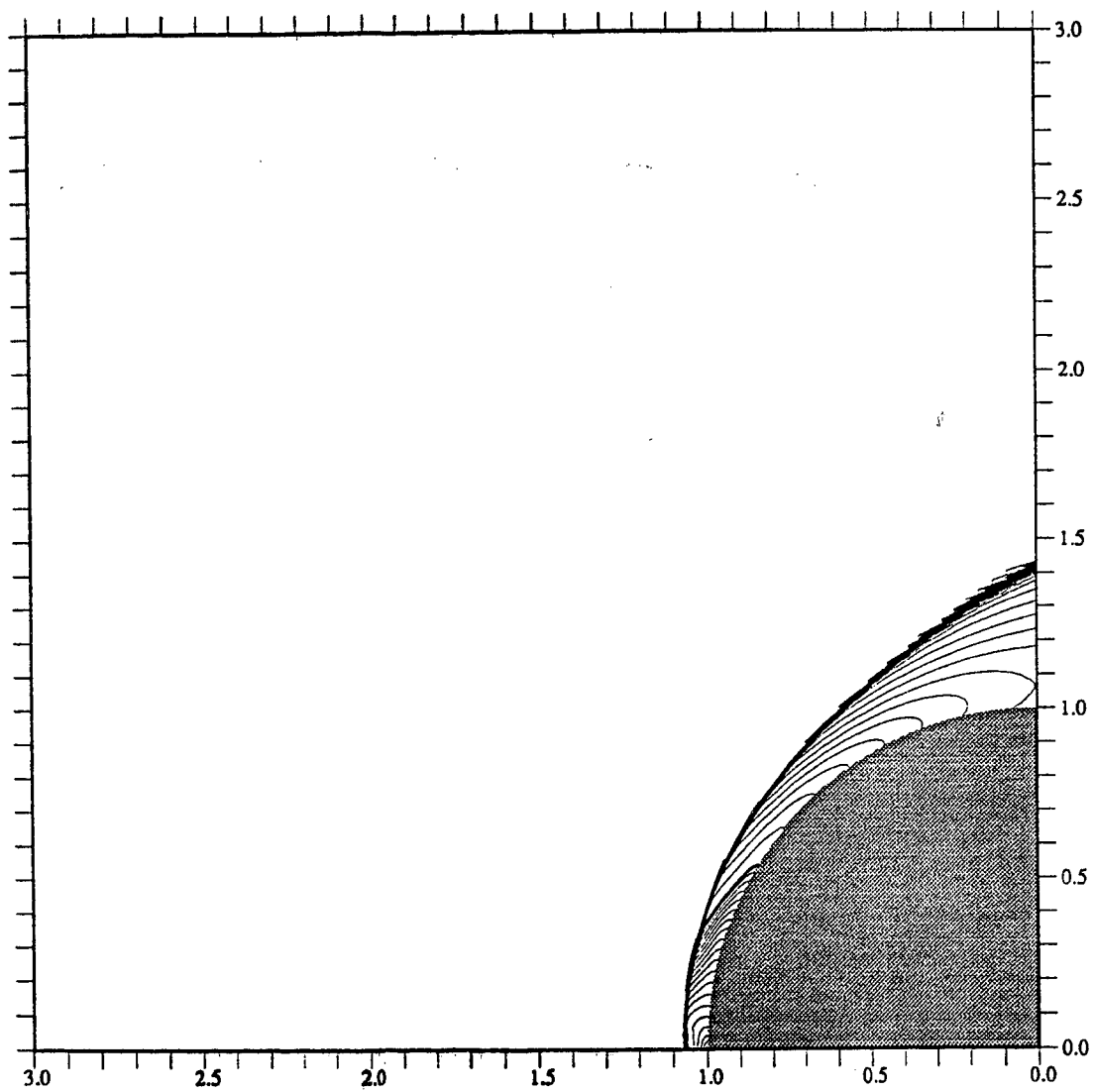
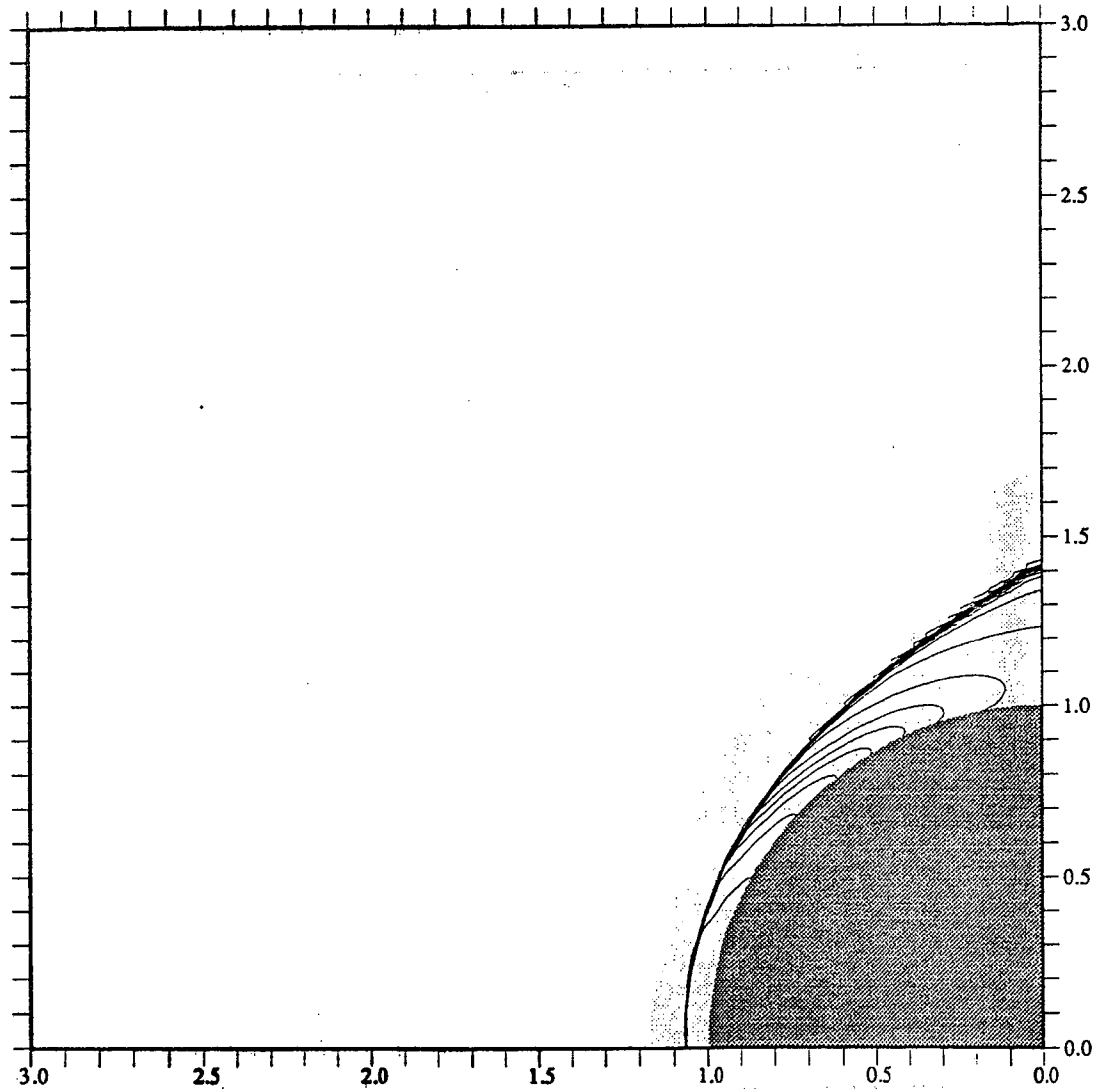
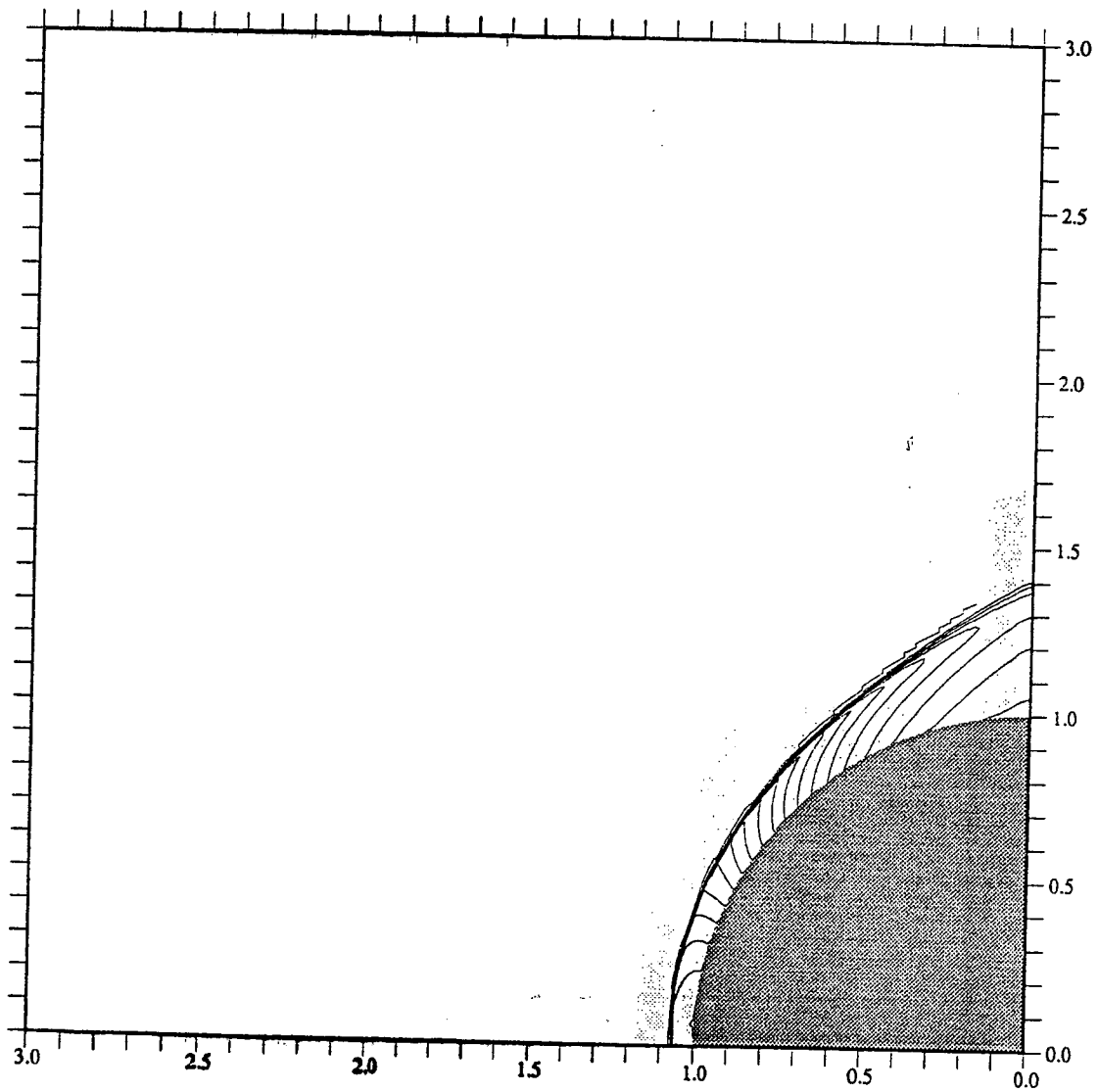


figure 7.i
Comparaison d'écoulements hypersoniques sur une sphère ($M_\infty = 15$)
lignes iso-température : gaz réactif



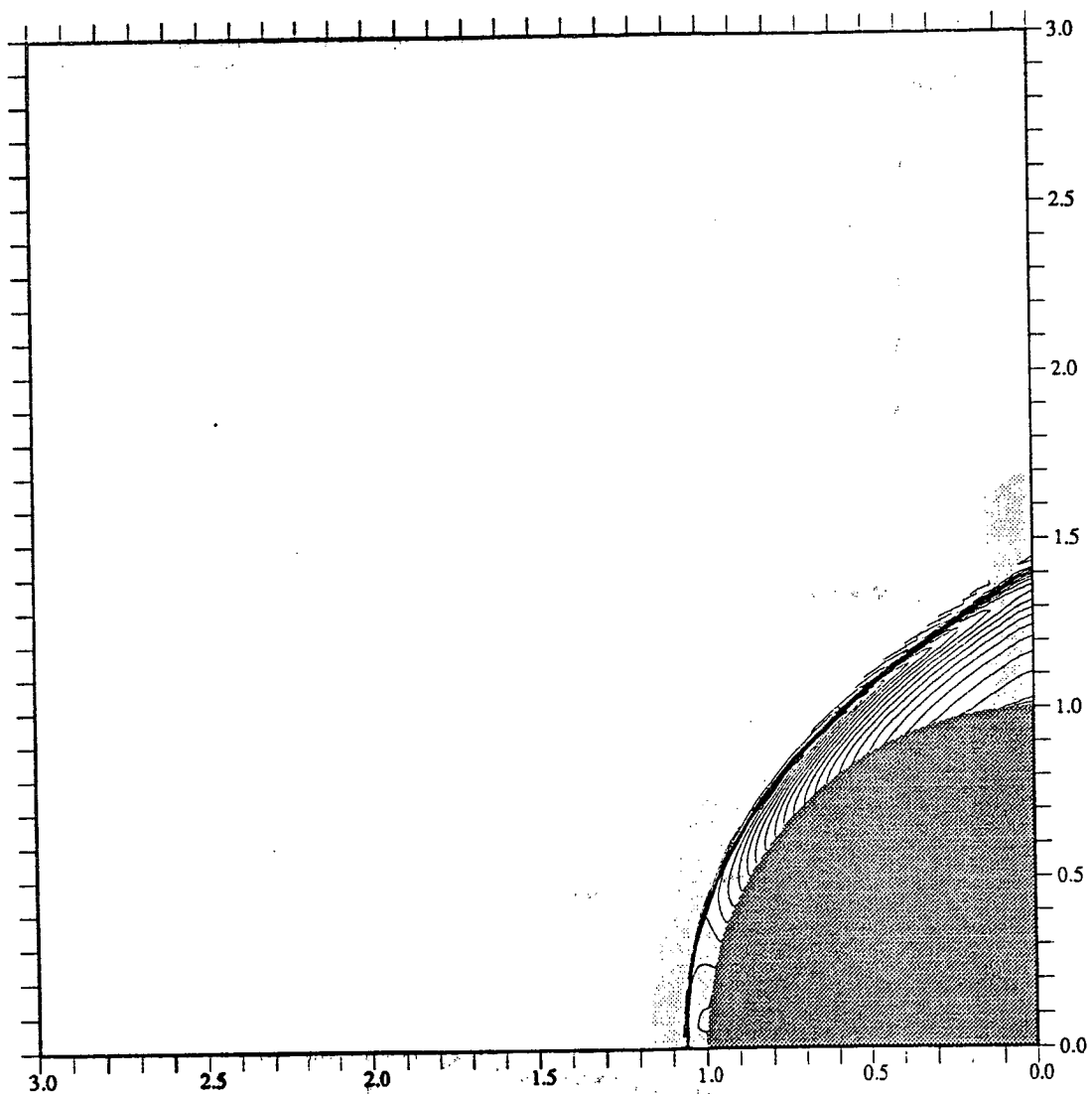
Temperature inf 238.0 K
Temperature max 4720.0 K

figure 7.j
Comparaison d'écoulements hypersoniques sur une sphère ($M_\infty = 15$)
lignes iso-pression : gaz réactif



Kp min 0.000
 Kp max 1.940

figure 7.k
Comparaison d'écoulements hypersoniques sur une sphère ($M_\infty = 15$)
lignes iso-densité : gaz réactif



Density min 0,732
 Density max 12,312

figure 7.1
Comparaison d'écoulements hypersoniques sur une sphère ($M_\infty = 15$)
Coupes de nombre de Mach et de température : gaz réactif

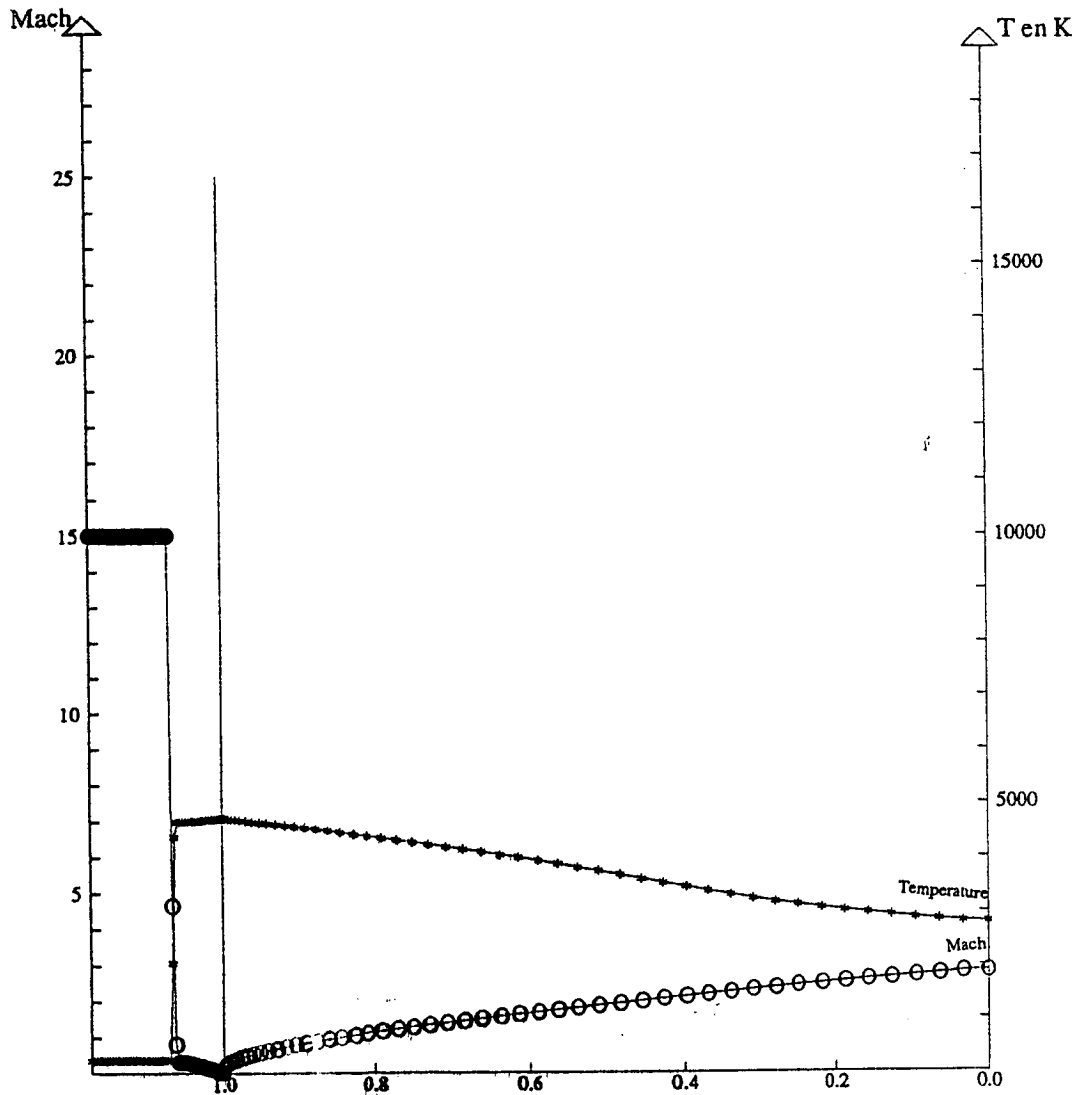


figure 7.m
Comparaison d'écoulements hypersoniques sur une sphère ($M_\infty = 15$)
Coupes de fractions massiques : gaz réactif

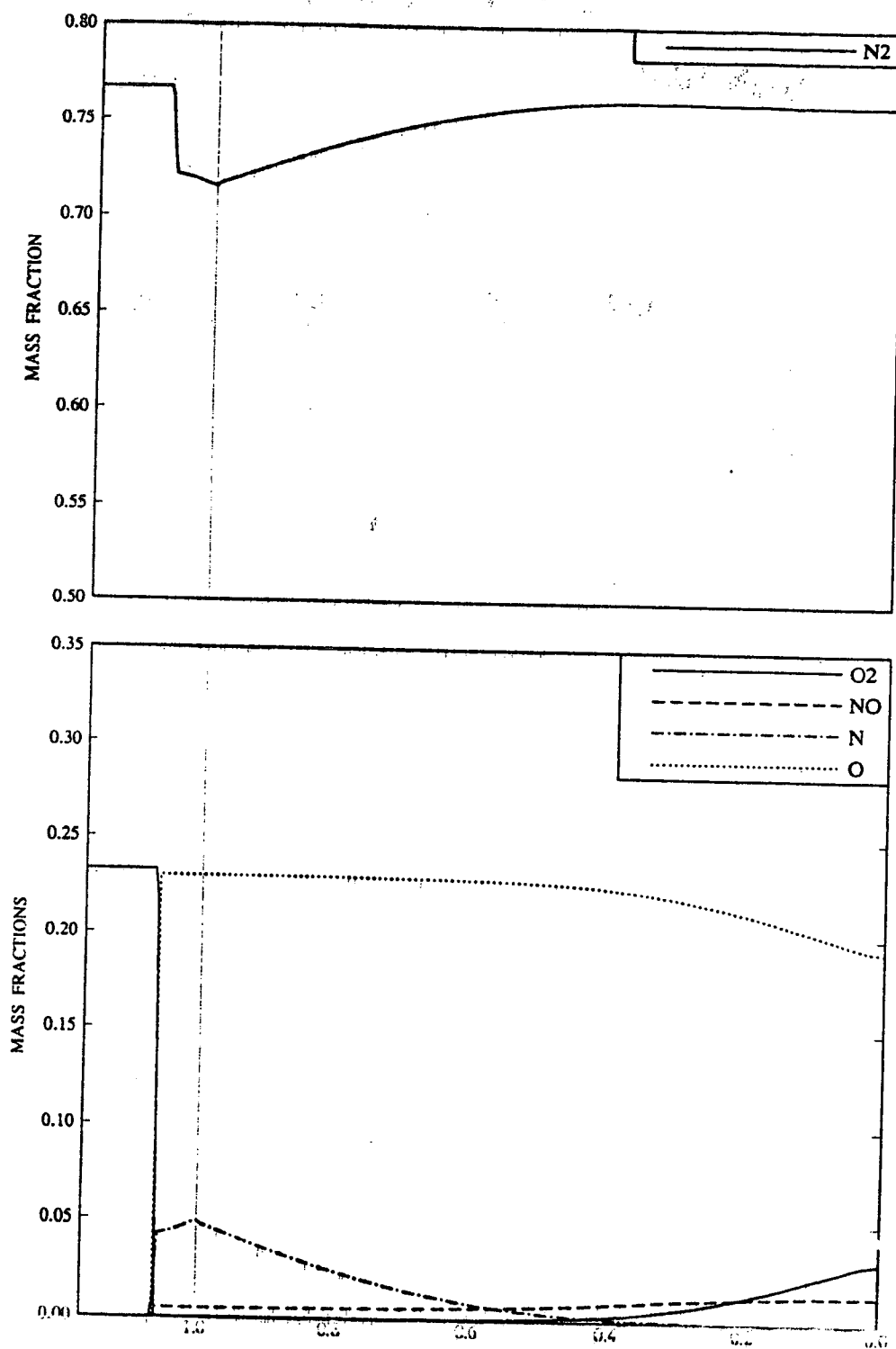


figure 7.n
 Comparaison d'écoulements hypersoniques sur une sphère ($M_\infty = 15$)
 Convergence itérative : gaz réactif, $CFL = 0.4$

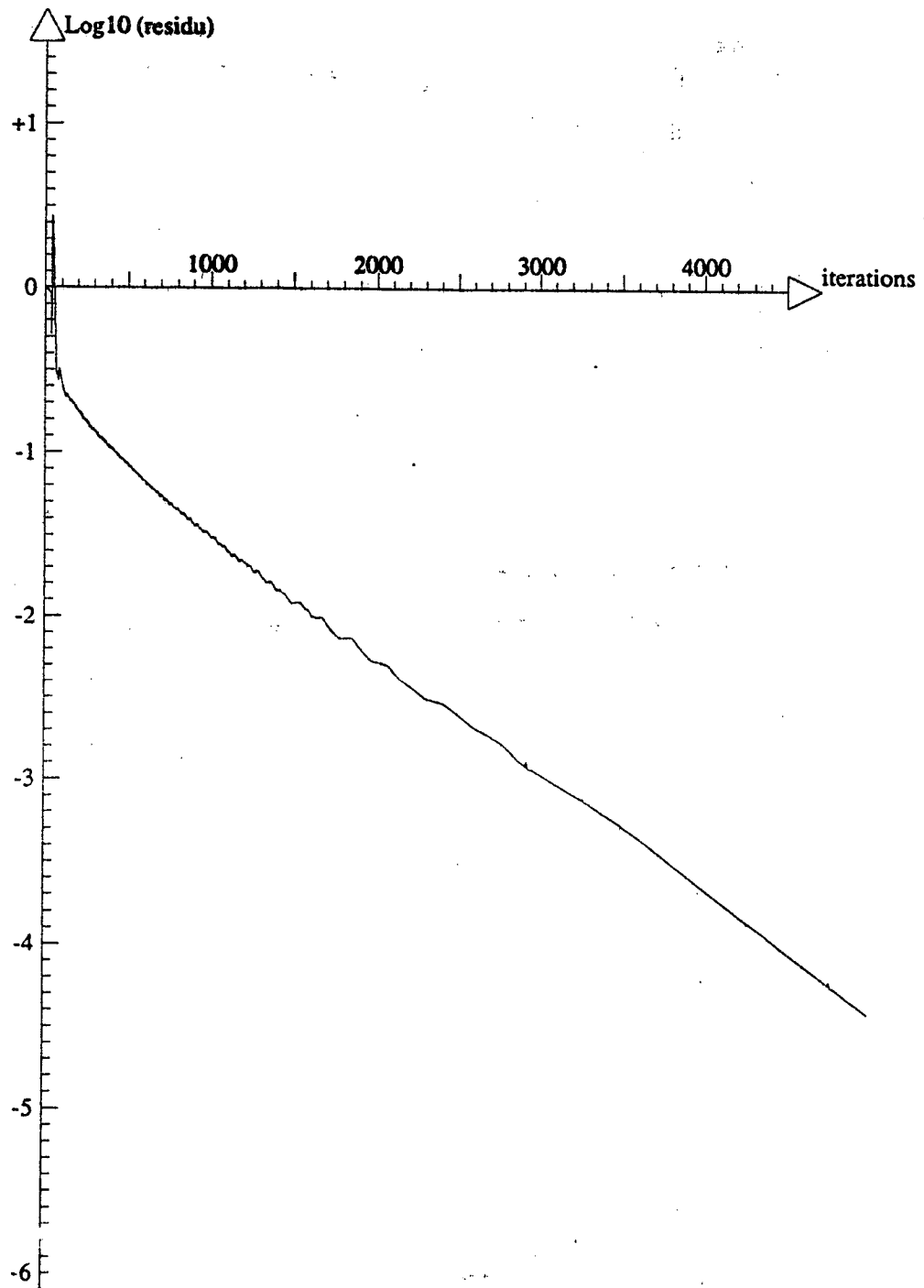


figure 8.a
Maillage de 101×51 points
Répartition uniforme sur la sphère

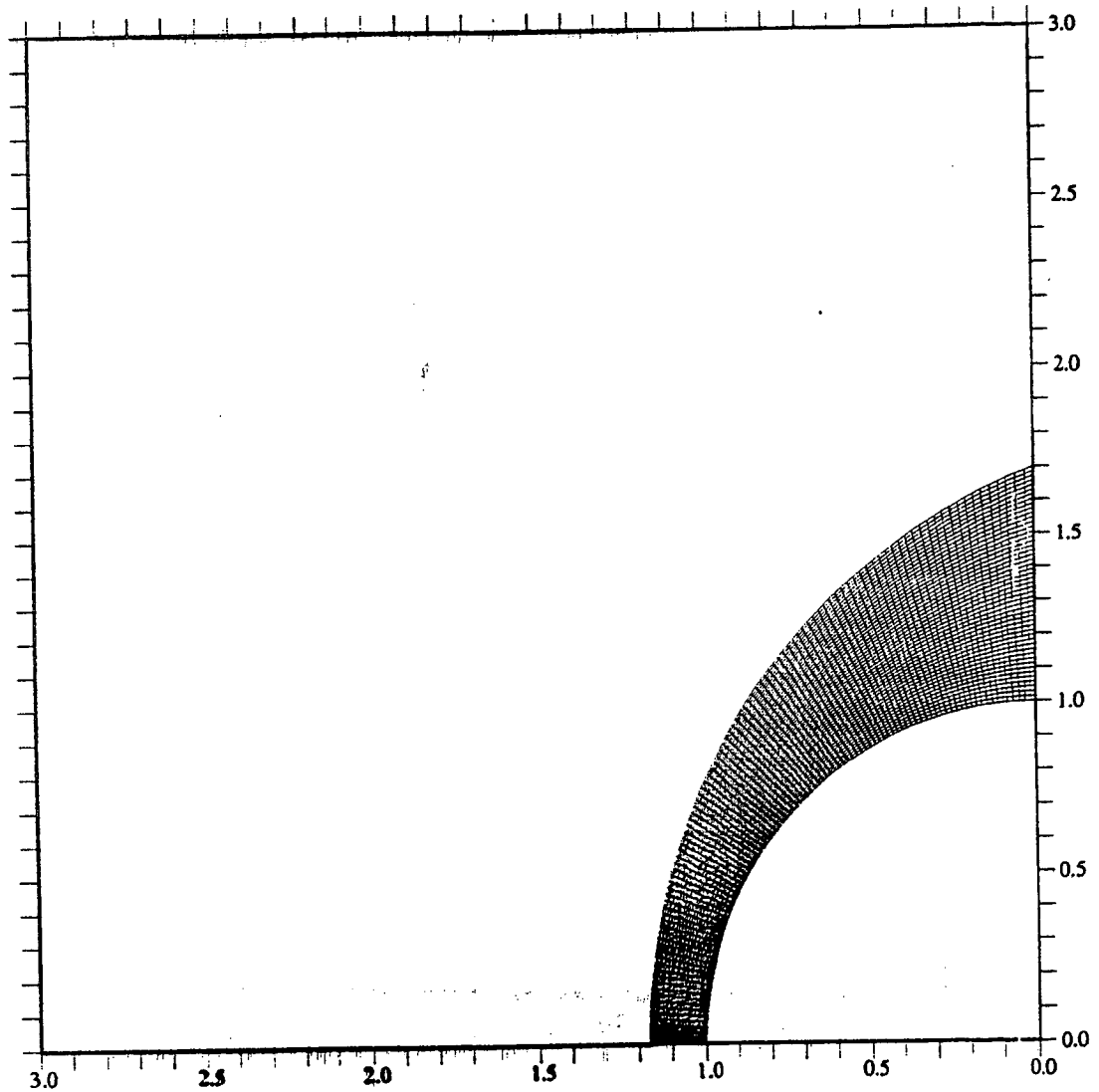


figure 8.b
Ecoulement hypersonique d'un gaz réactif sur une sphère
lignes iso-mach ($M_\infty = 15$)

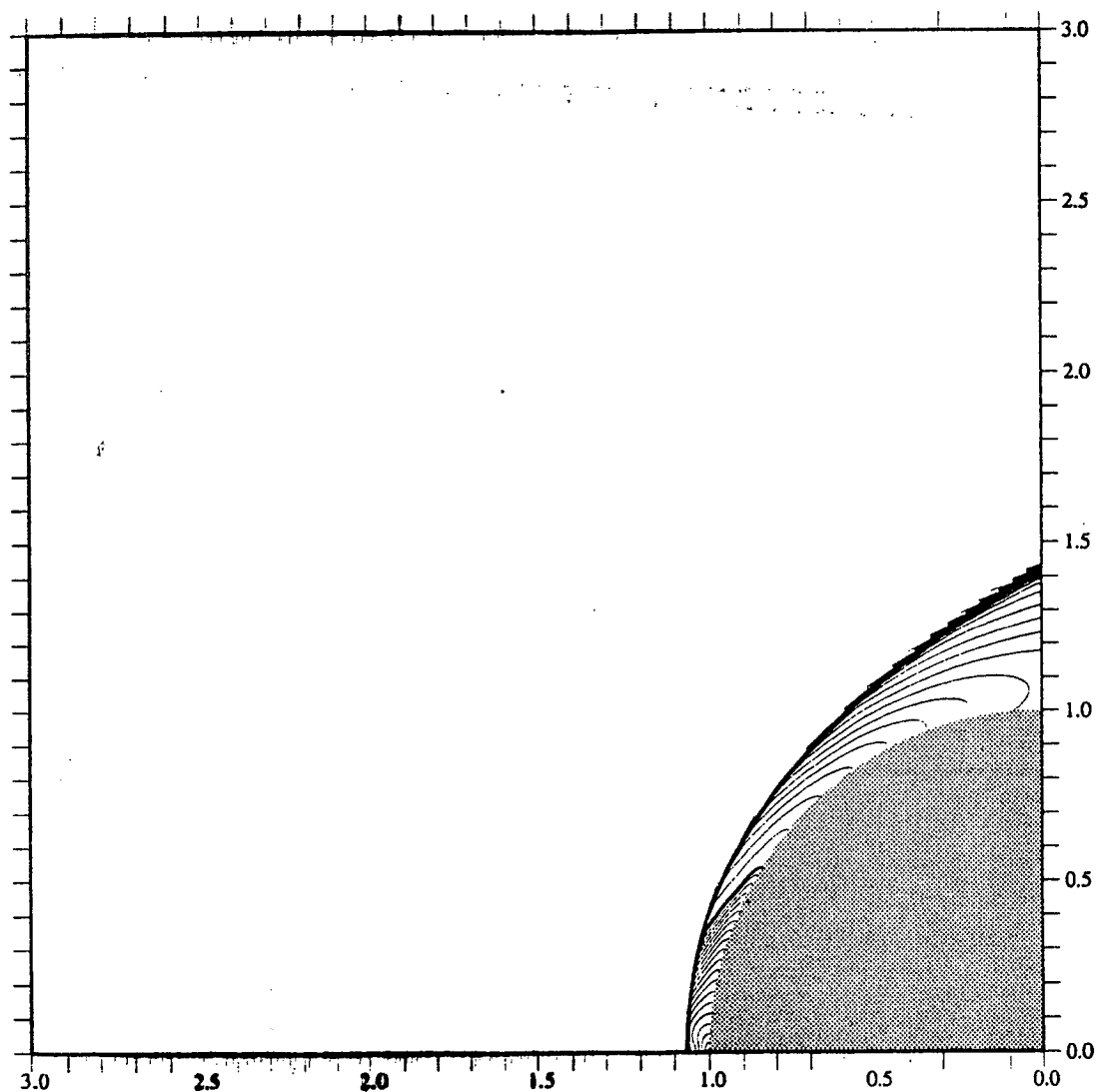
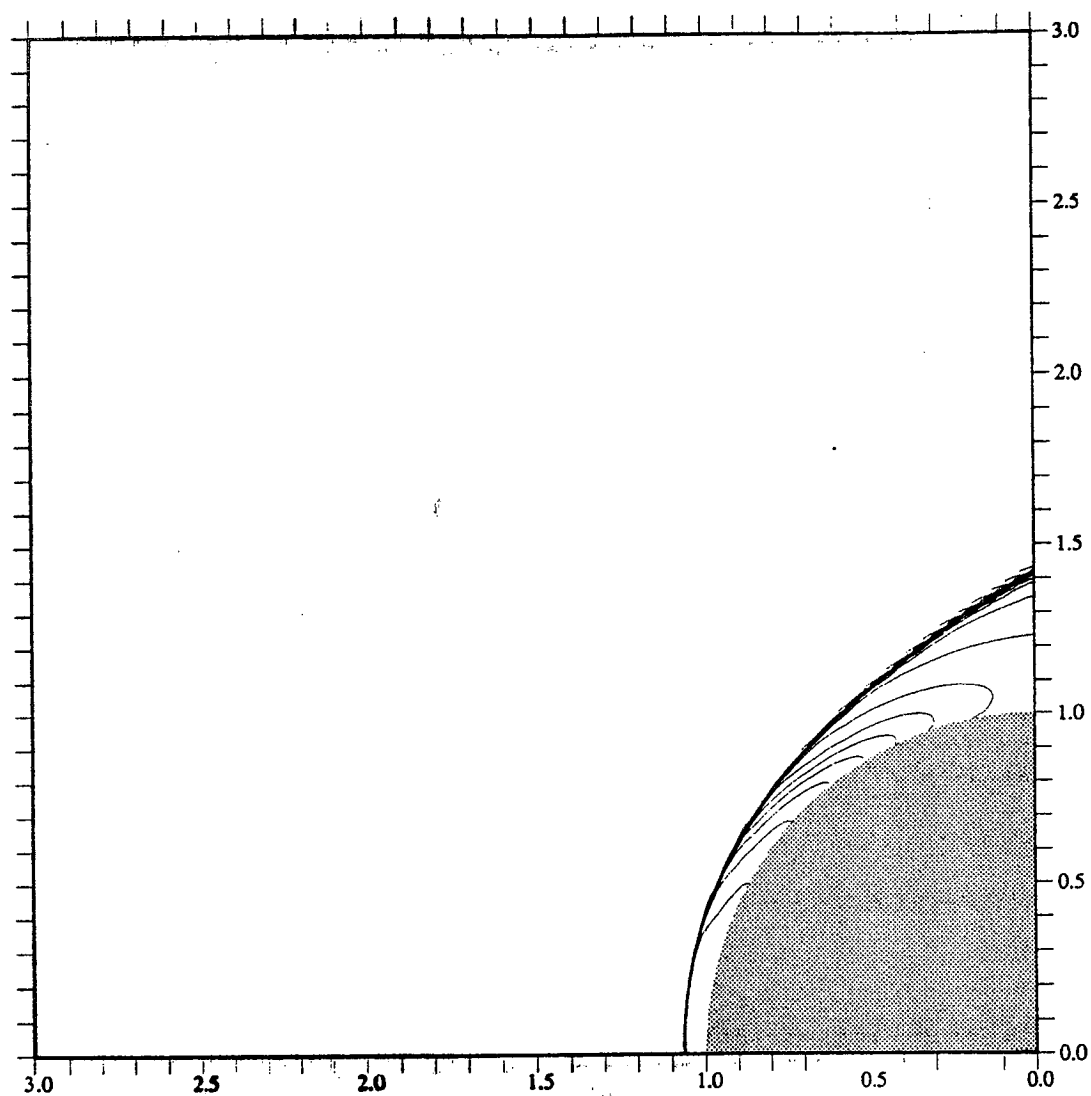
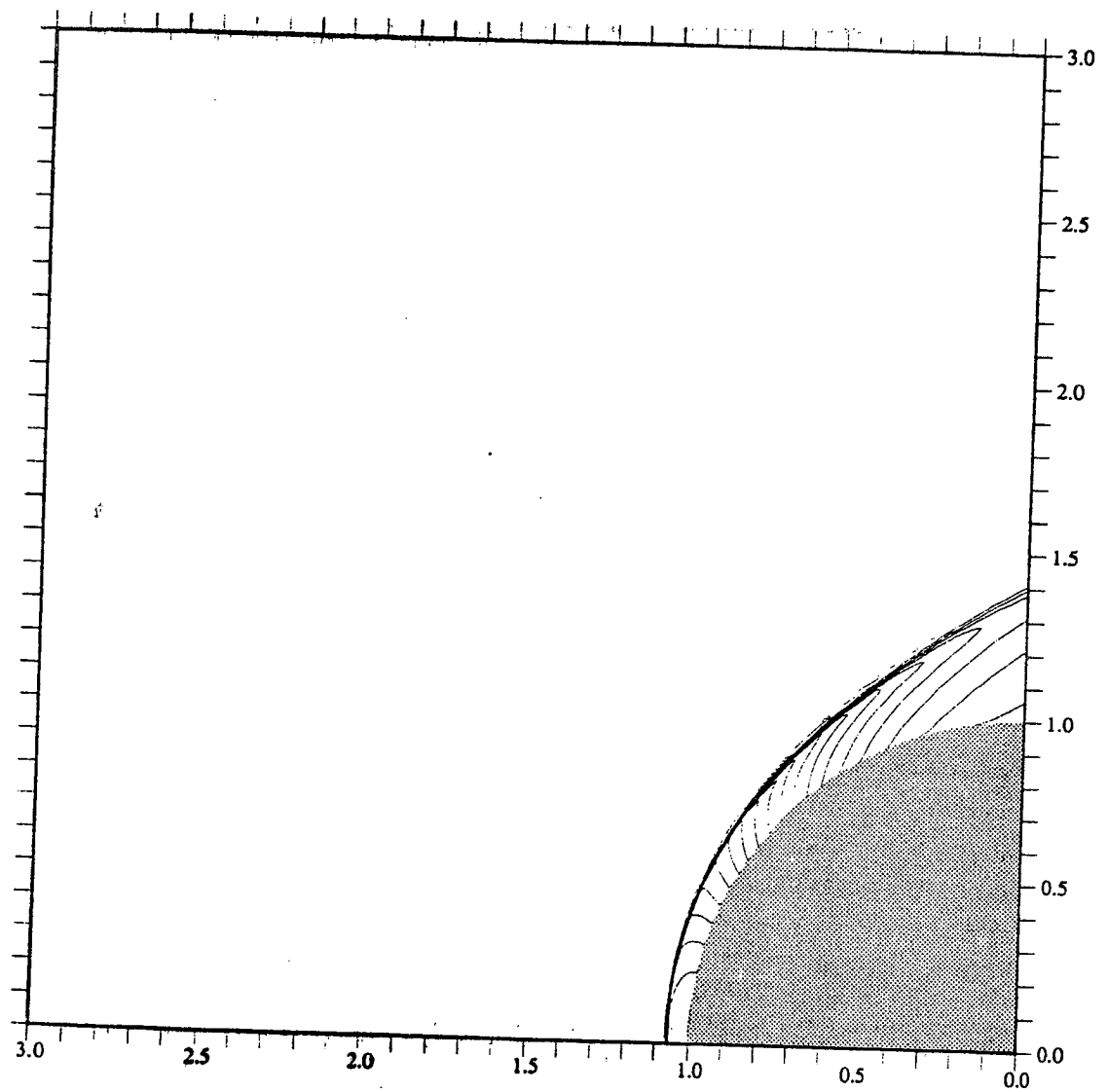


figure 8.c
Ecoulement hypersonique d'un gaz réactif sur une sphère
lignes iso-température ($M_\infty = 15$)



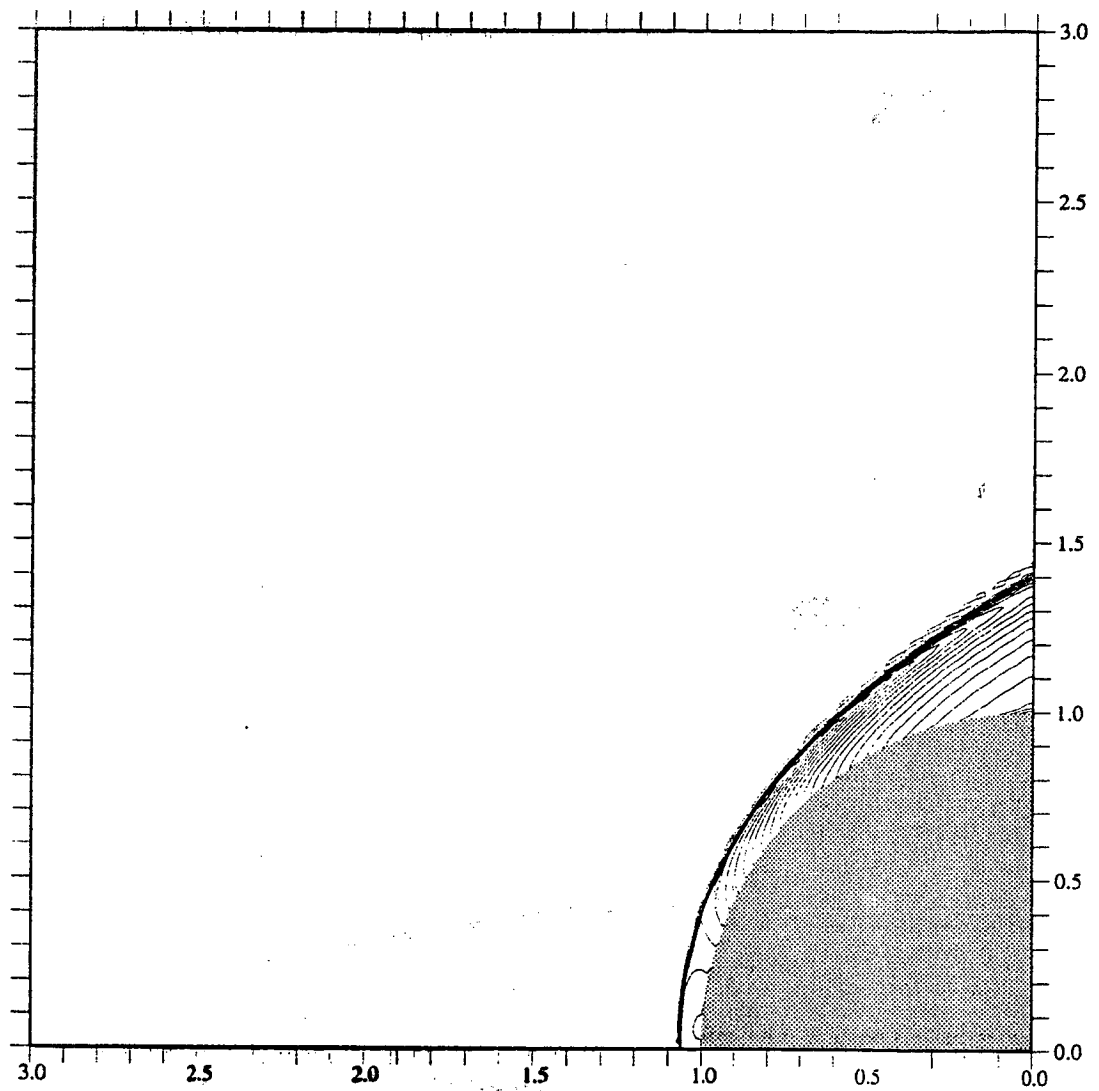
Temperature inf 238.0 K
Temperature max 4713.8 K

figure 8.d
Ecoulement hypersonique d'un gaz réactif sur une sphère
lignes iso-pression ($M_\infty = 15$)



Kp min 0.000
 Kp max 1.930

figure 8.e
Ecoulement hypersonique d'un gaz réactif sur une sphère
lignes iso-densité ($M_\infty = 15$)



Density min 0.720
Density max 12.273

figure 8.f
 Ecoulement hypersonique d'un gaz réactif sur une sphère
 Coupes de nombre de Mach et de température ($M_\infty = 15$)

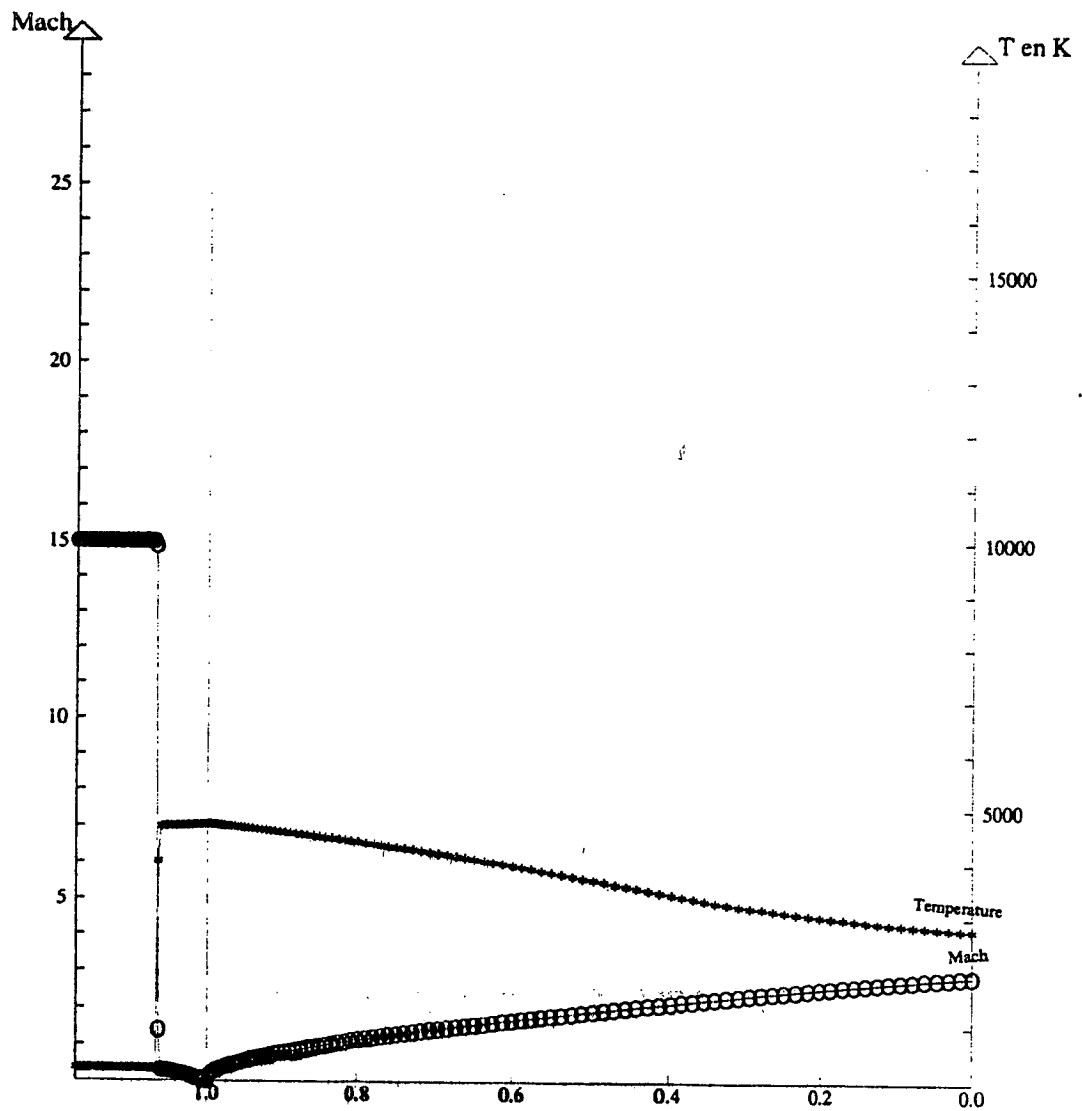


figure 8.g
Ecoulement hypersonique d'un gaz réactif sur une sphère
Coupes de fractions massiques ($M_\infty = 15$)

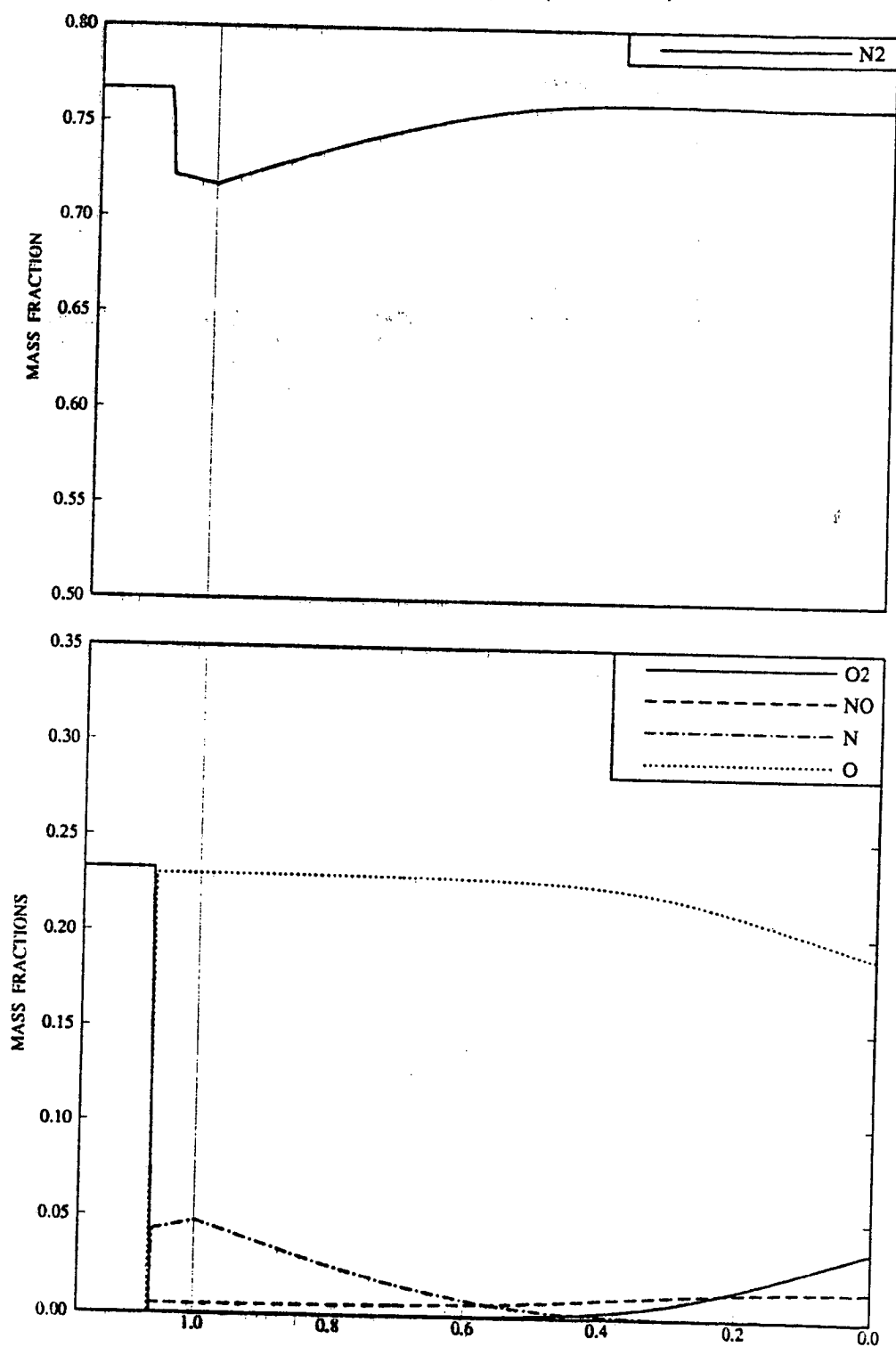


figure 8.h
Ecoulement hypersonique d'un gaz réactif sur une sphère
Convergence itérative , $CFL = 0.4$

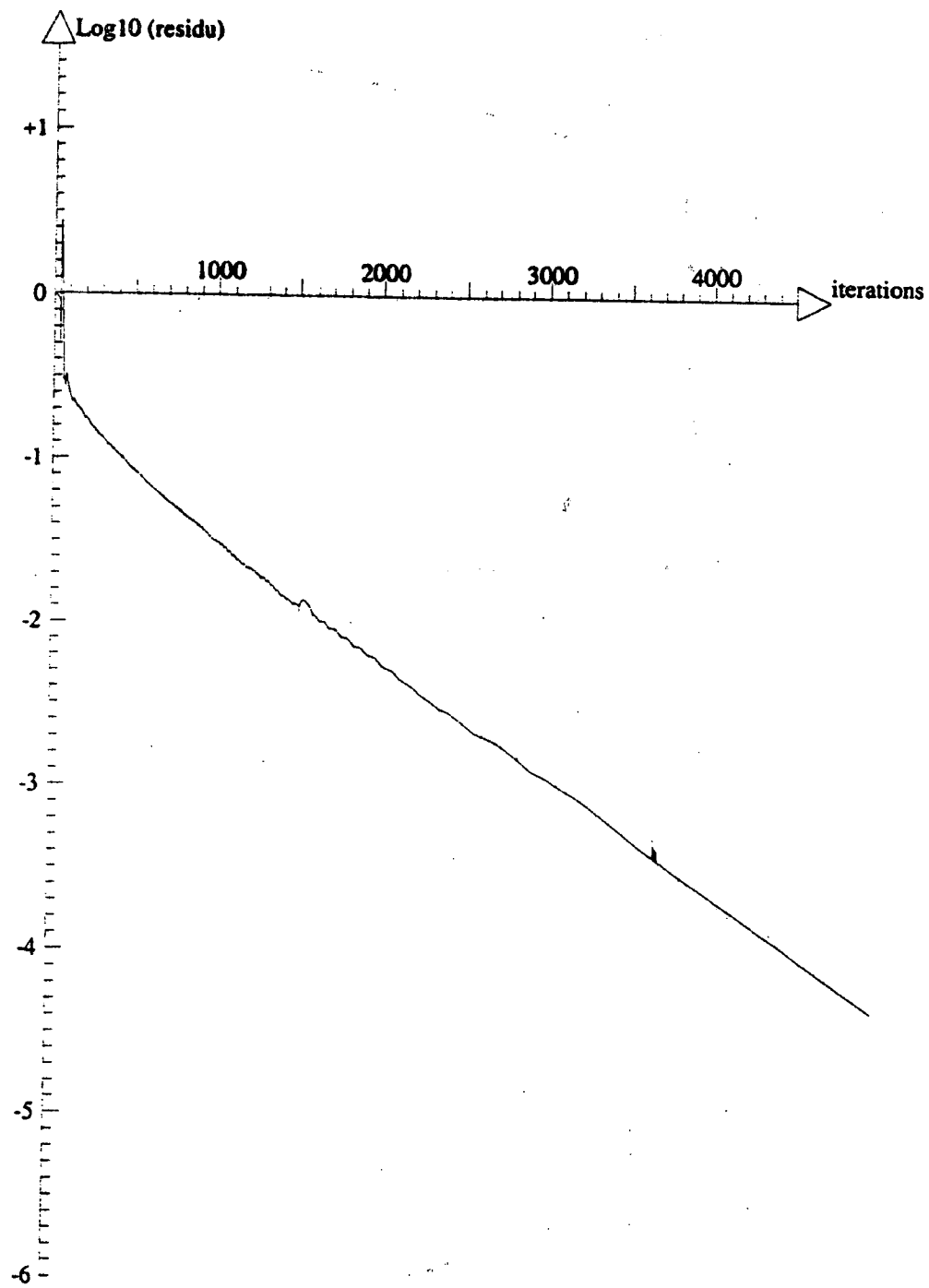


figure 9.a
Maillage de 101×51 points
Répartition concentrée dans le voisinage du point d'arrêt

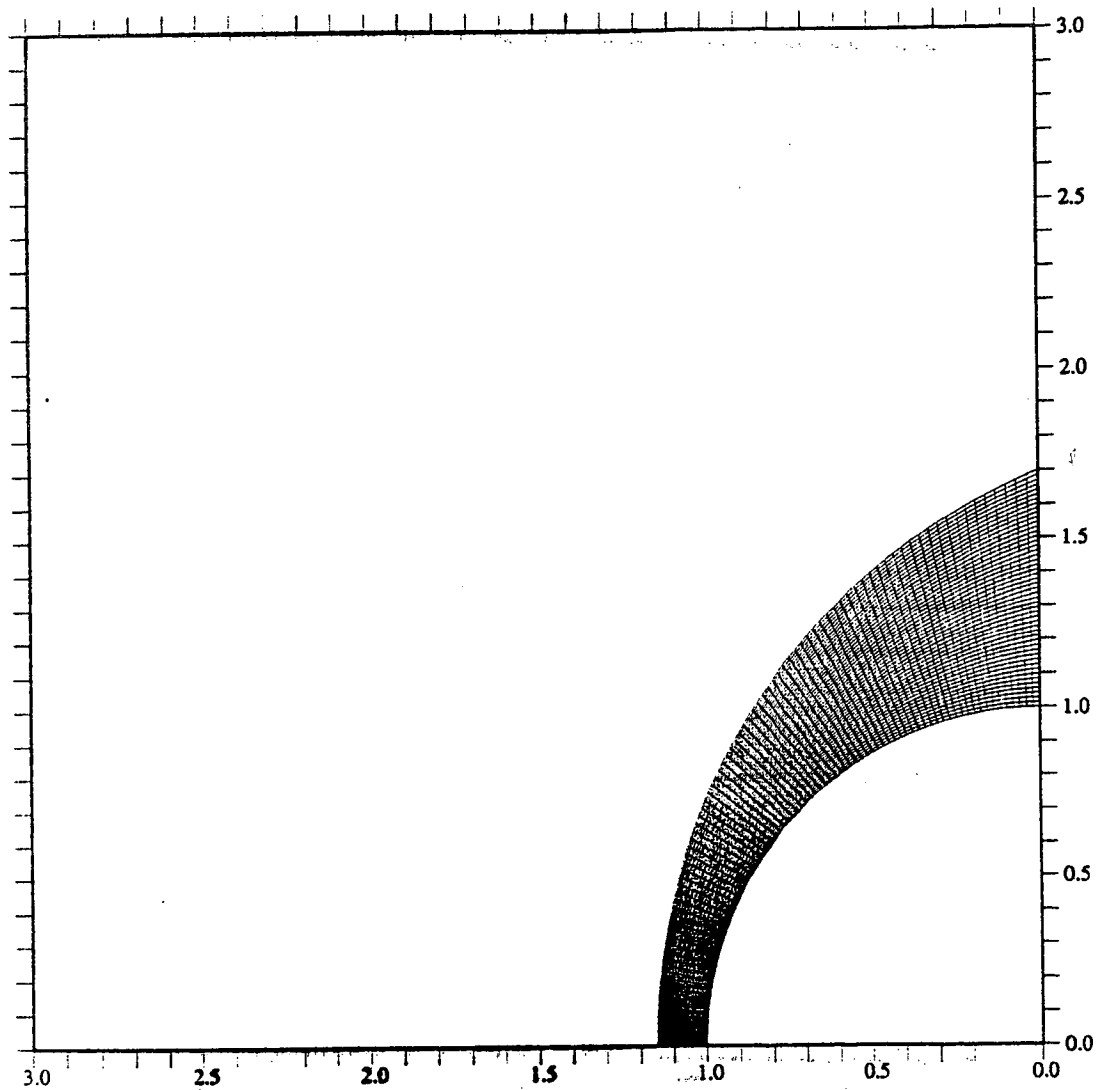


figure 9.b
Ecoulement hypersonique d'un gaz réactif sur une sphère
lignes iso-mach ($M_\infty = 15$)

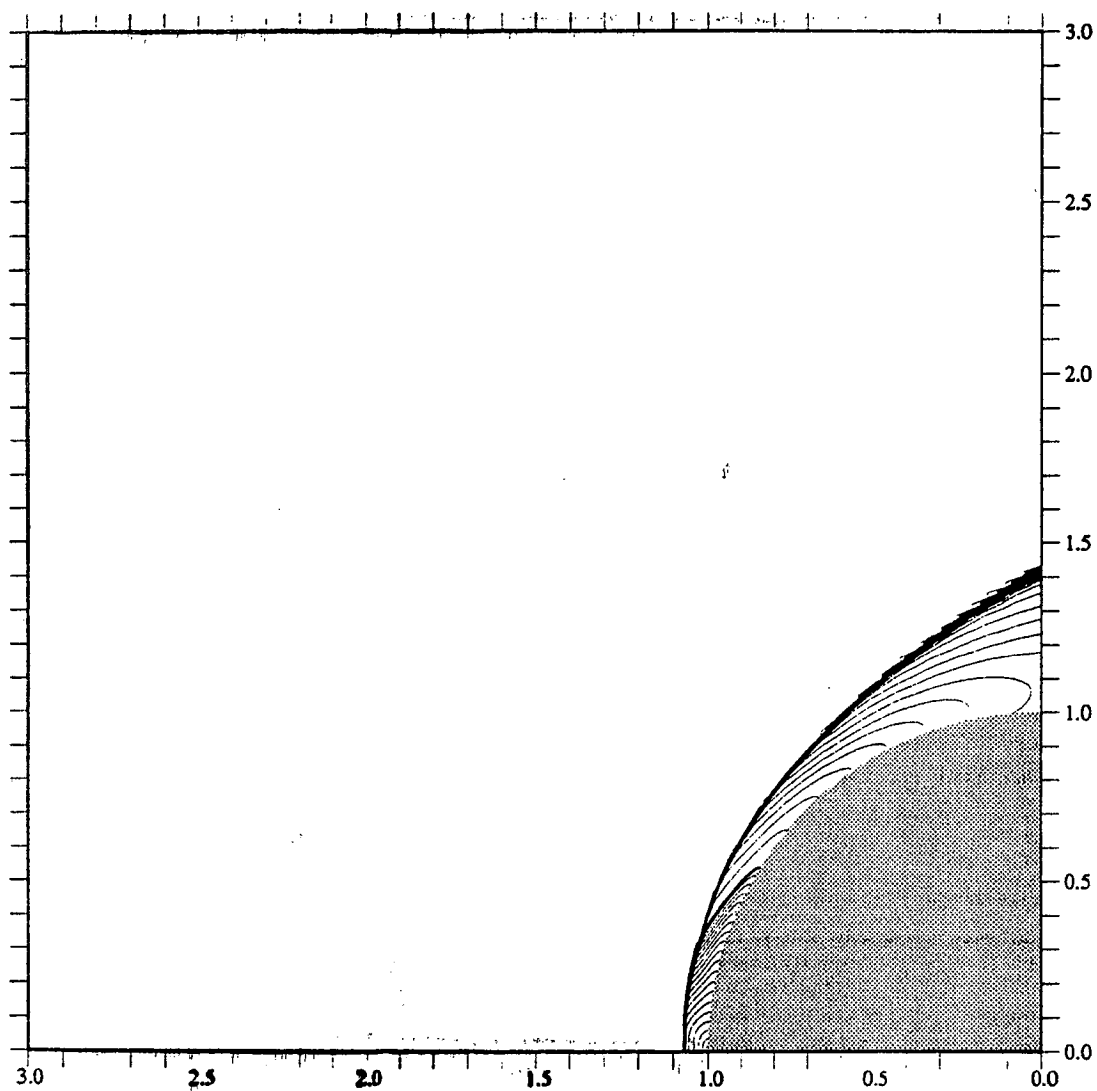
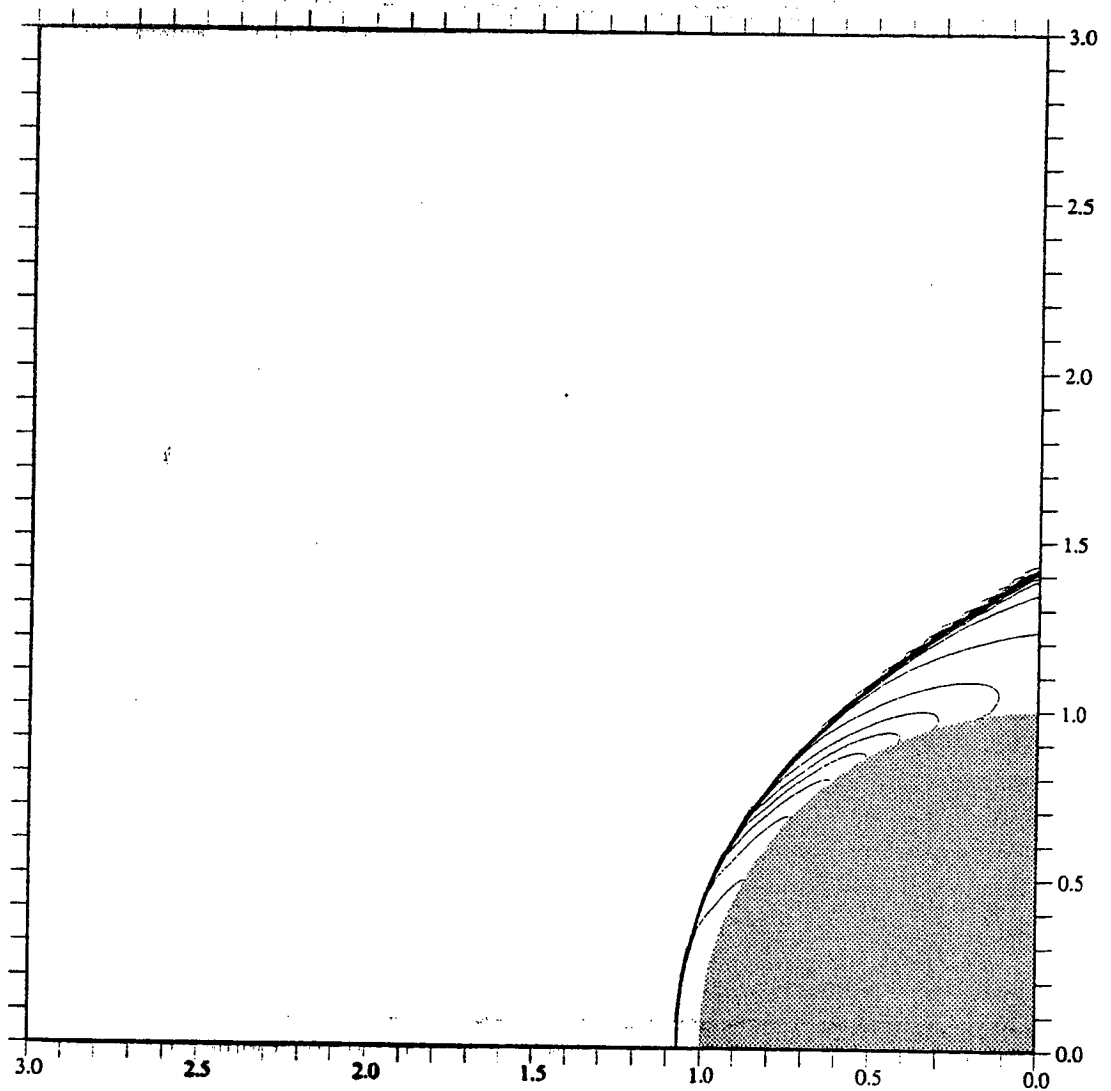
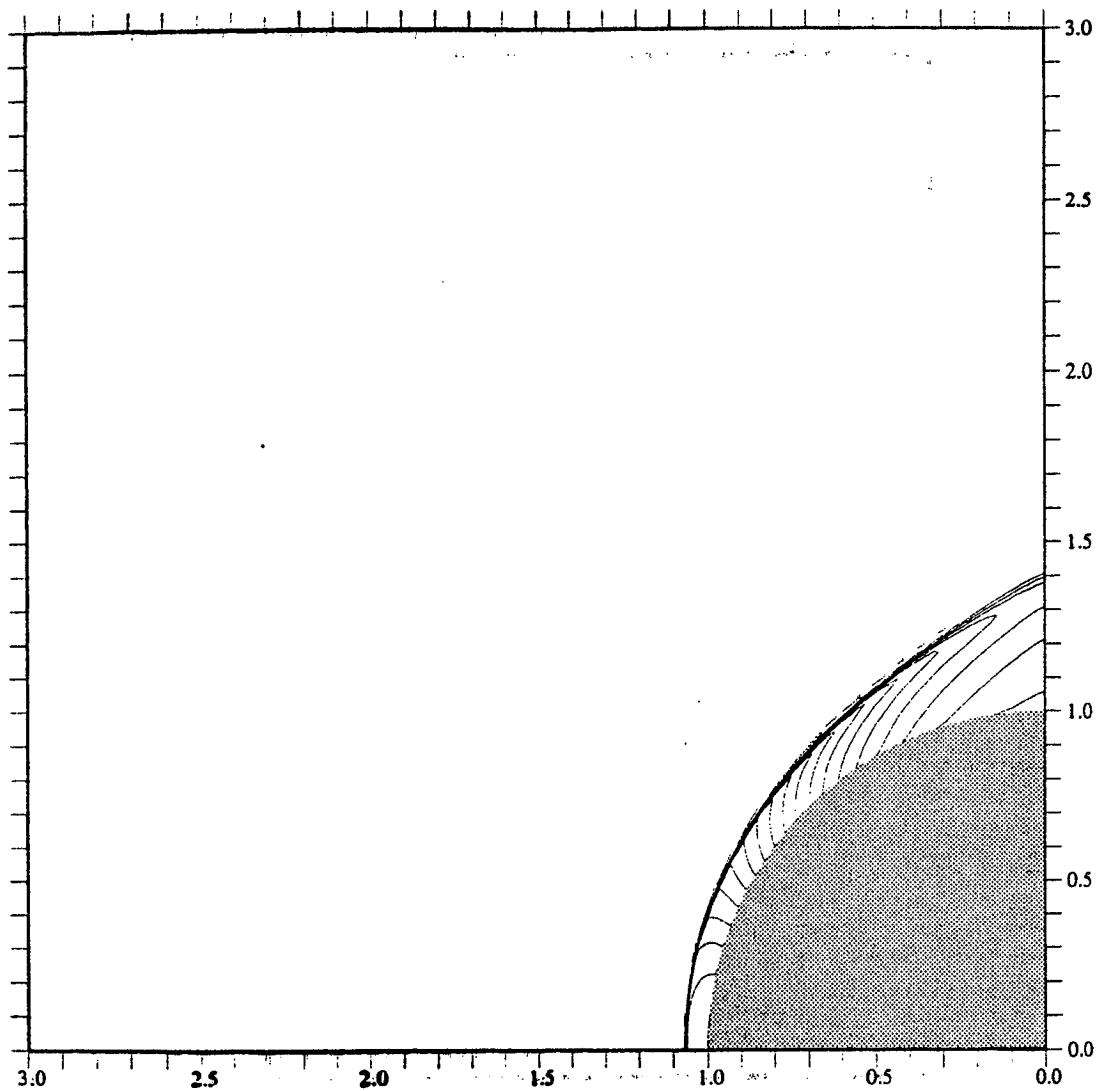


figure 9.c
Ecoulement hypersonique d'un gaz réactif sur une sphère
lignes iso-température ($M_\infty = 15$)



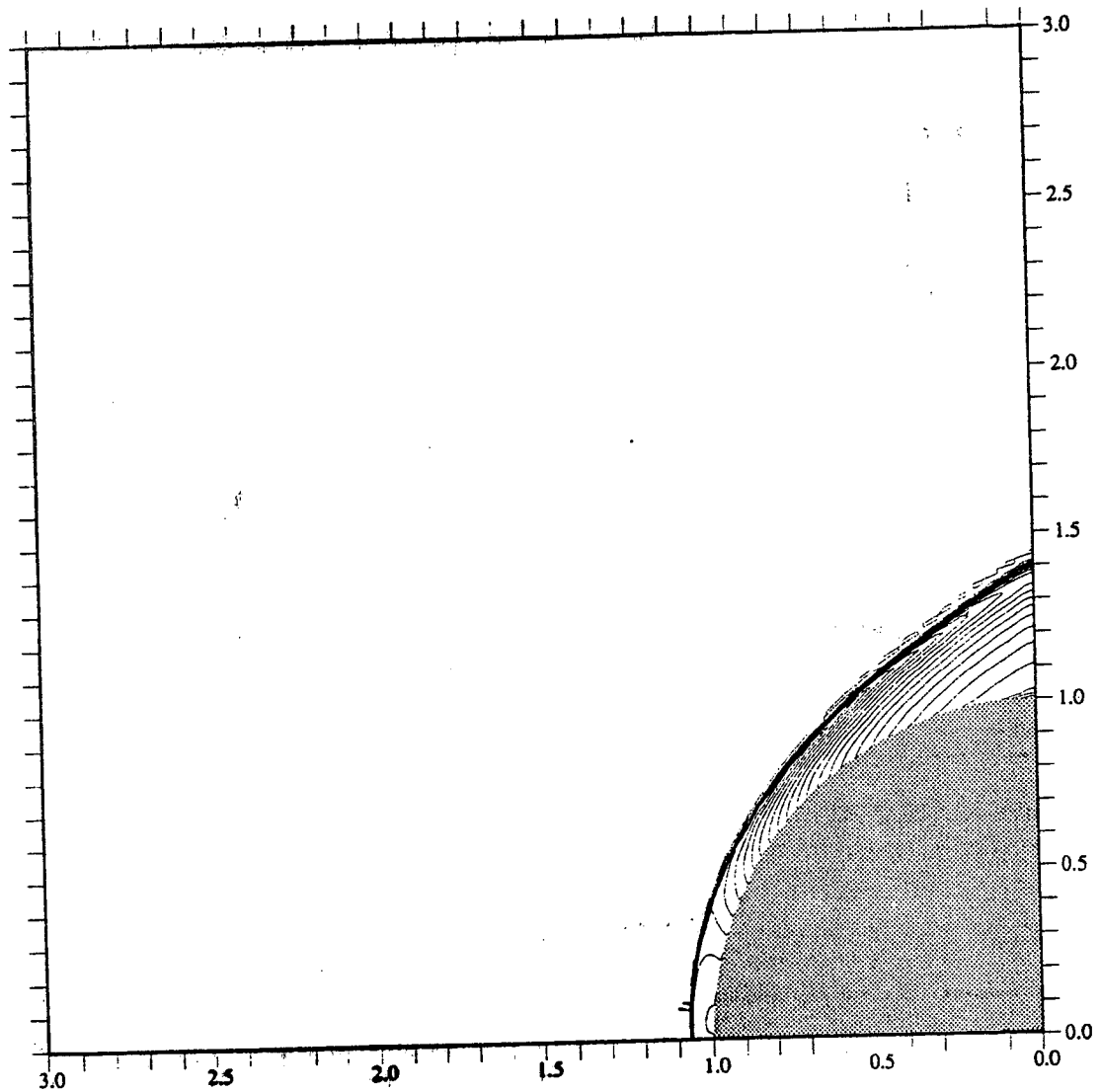
Temperature inf 234.3 K
Temperature max 4707.8 K

figure 9.d
 Ecoulement hypersonique d'un gaz réactif sur une sphère
 lignes iso-pression ($M_\infty = 15$)



Kp min -0.000
 Kp max 1.921

figure 9.e
Ecoulement hypersonique d'un gaz réactif sur une sphère
lignes iso-densité ($M_\infty = 15$)



Density min 0.724
Density max 12.233

figure 9.f
 Ecoulement hypersonique d'un gaz réactif sur une sphère
 Coupes de nombre de Mach et de température ($M_\infty = 15$)

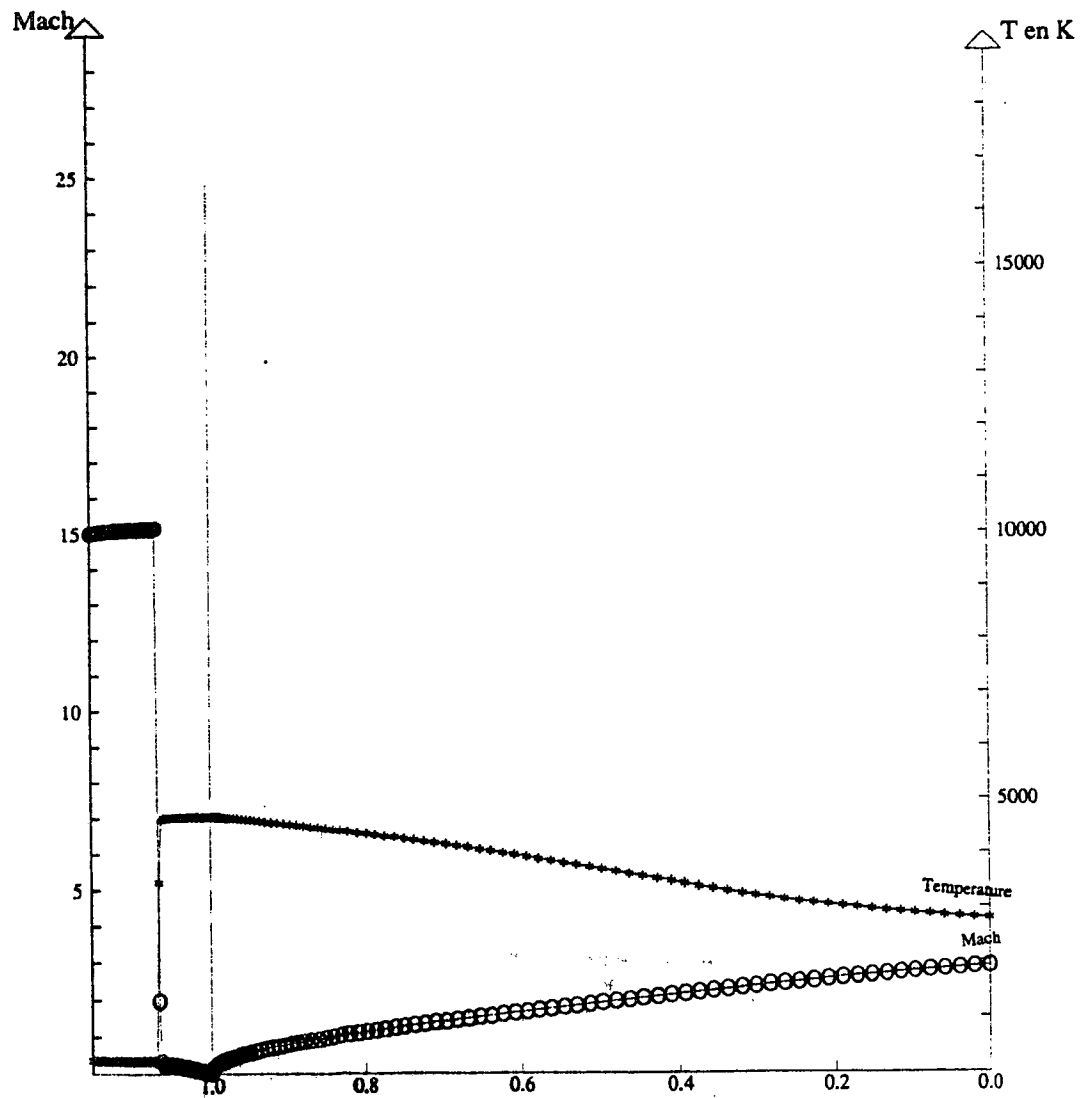


figure 9.g
Ecoulement hypersonique d'un gaz réactif sur une sphère
Coupes de fractions massiques ($M_\infty = 15$)

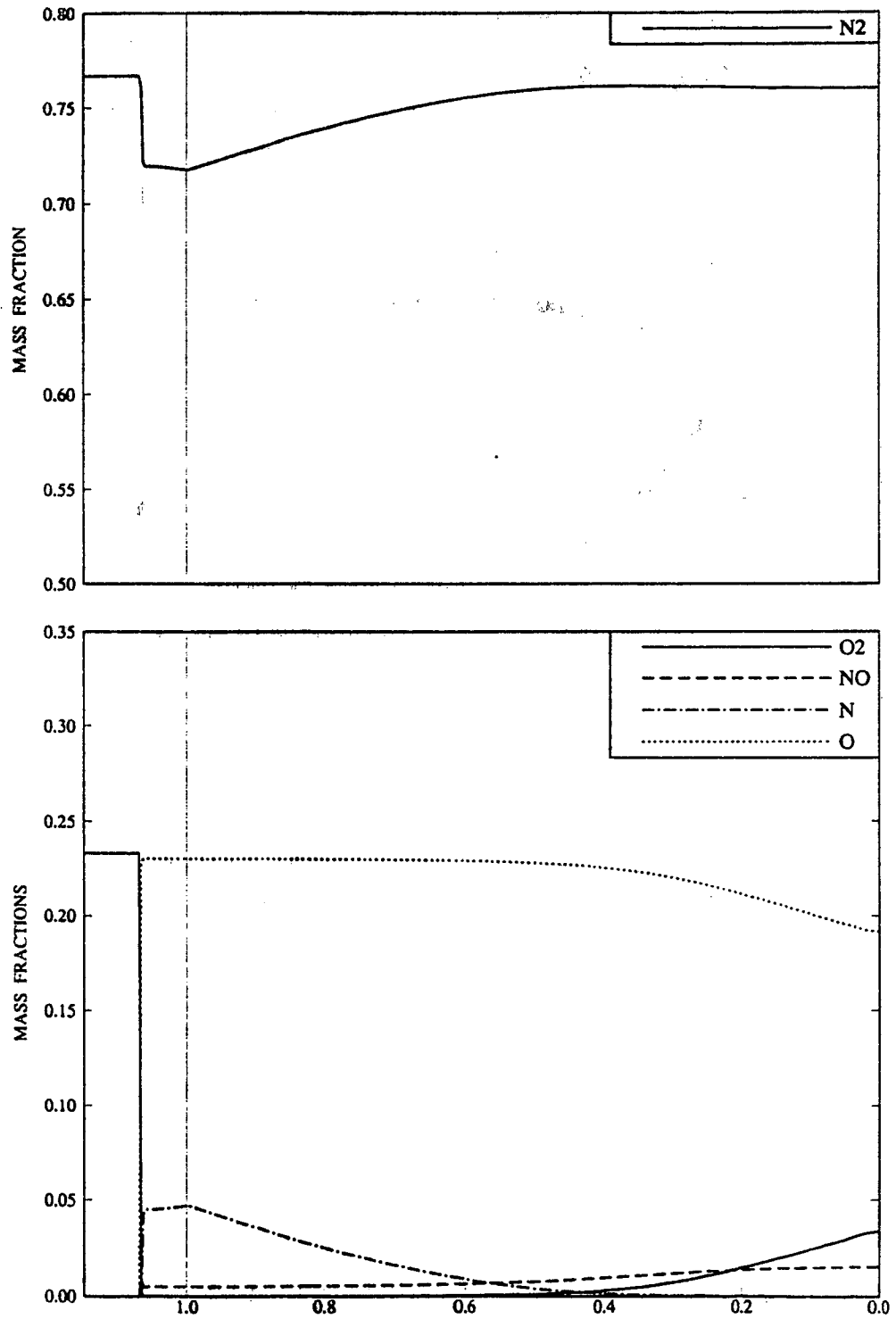


figure 9.h
Ecoulement hypersonique d'un gaz réactif sur une sphère
Convergence itérative , $CFL = 0.4$

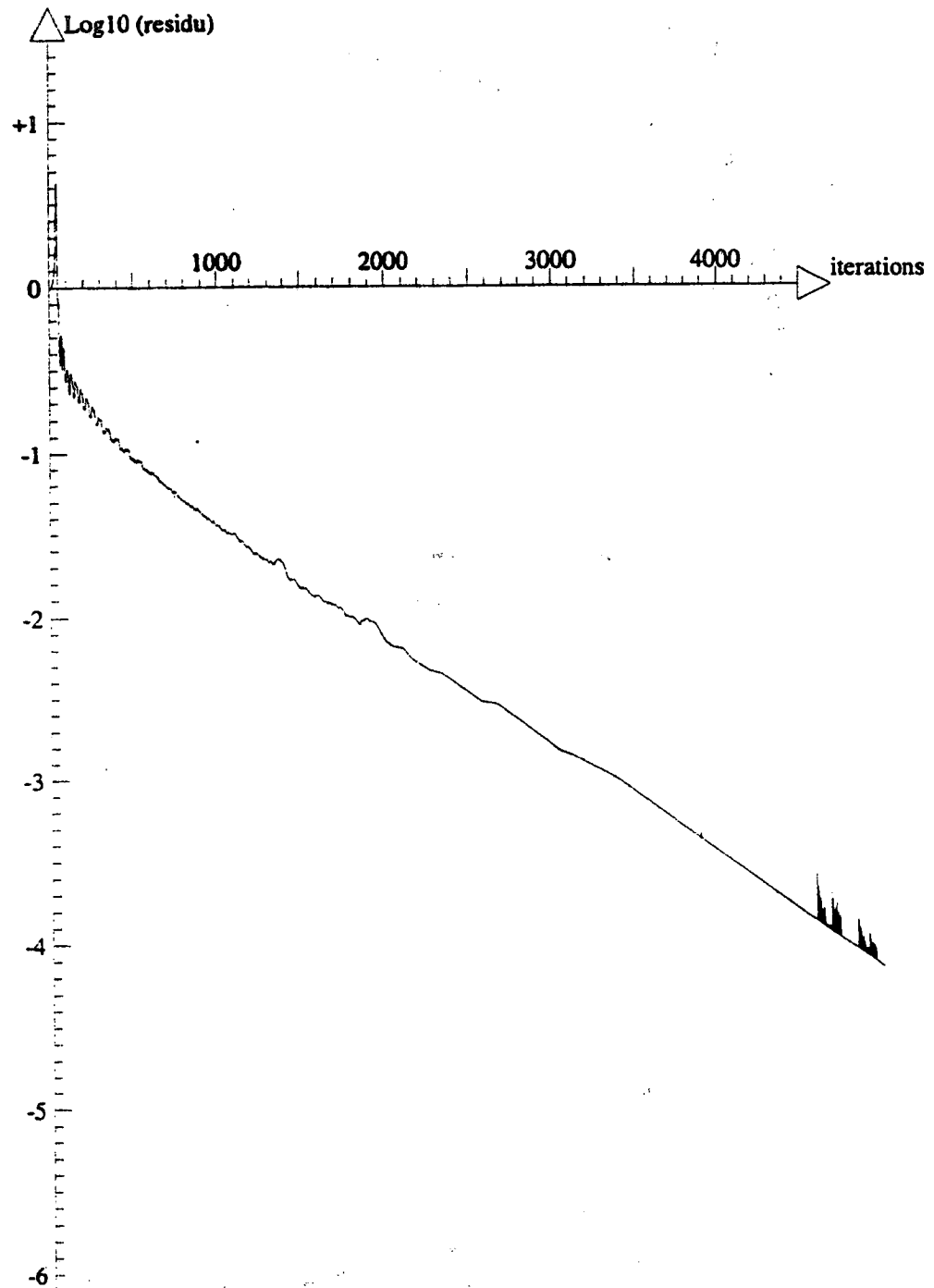


figure 10.a
Ecoulement hypersonique d'un gaz réactif sur une sphère
lignes iso-mach ($M_\infty = 25$)

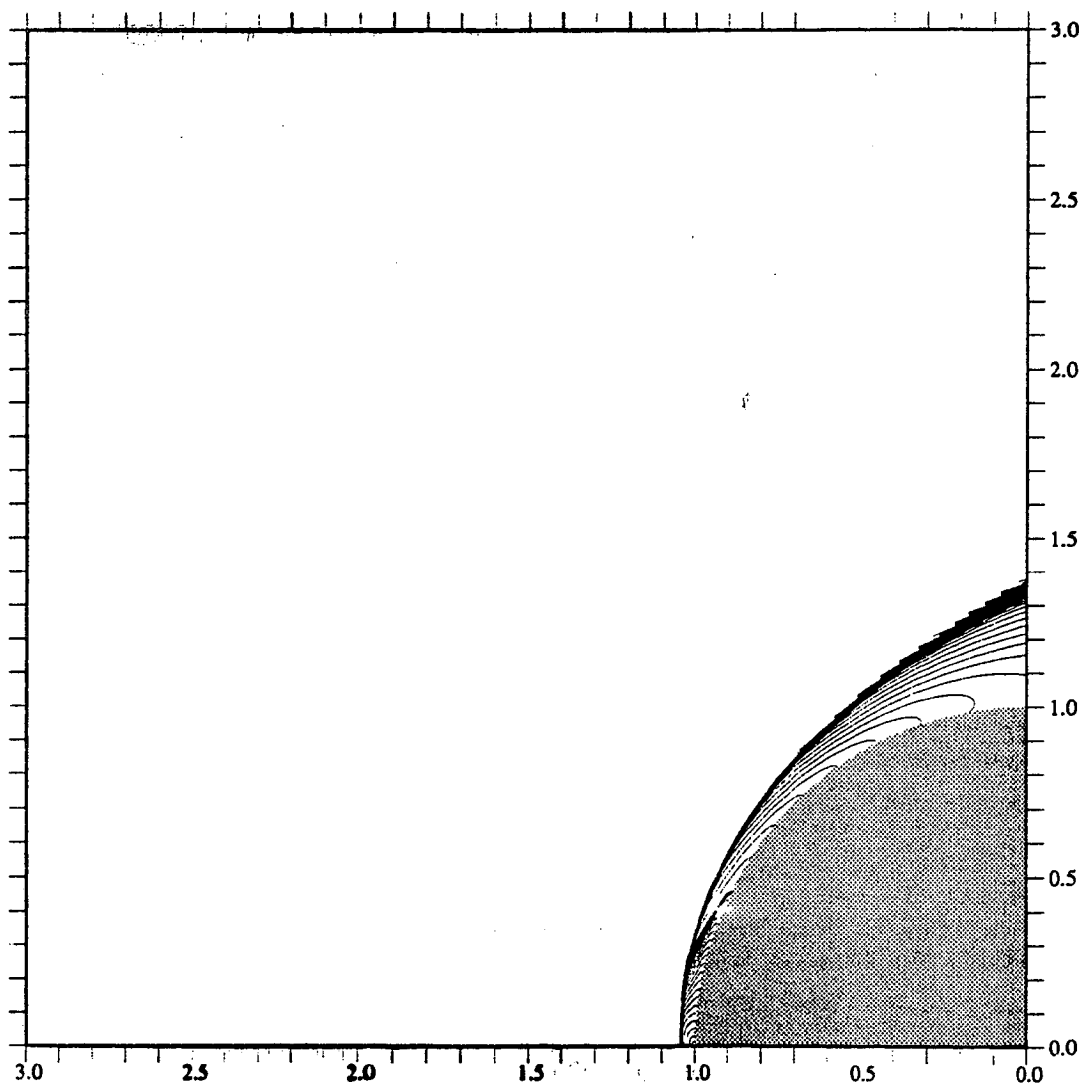
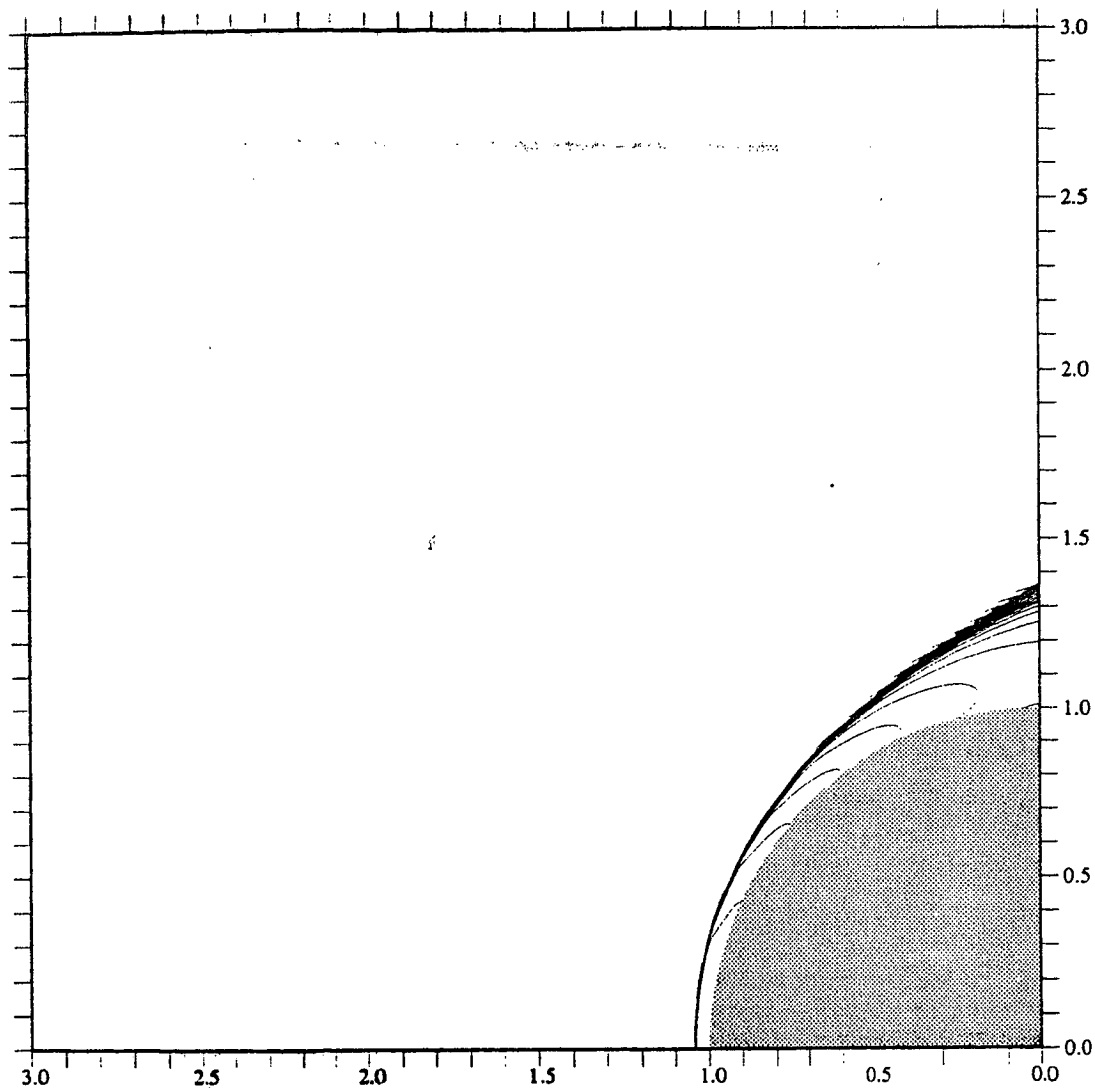
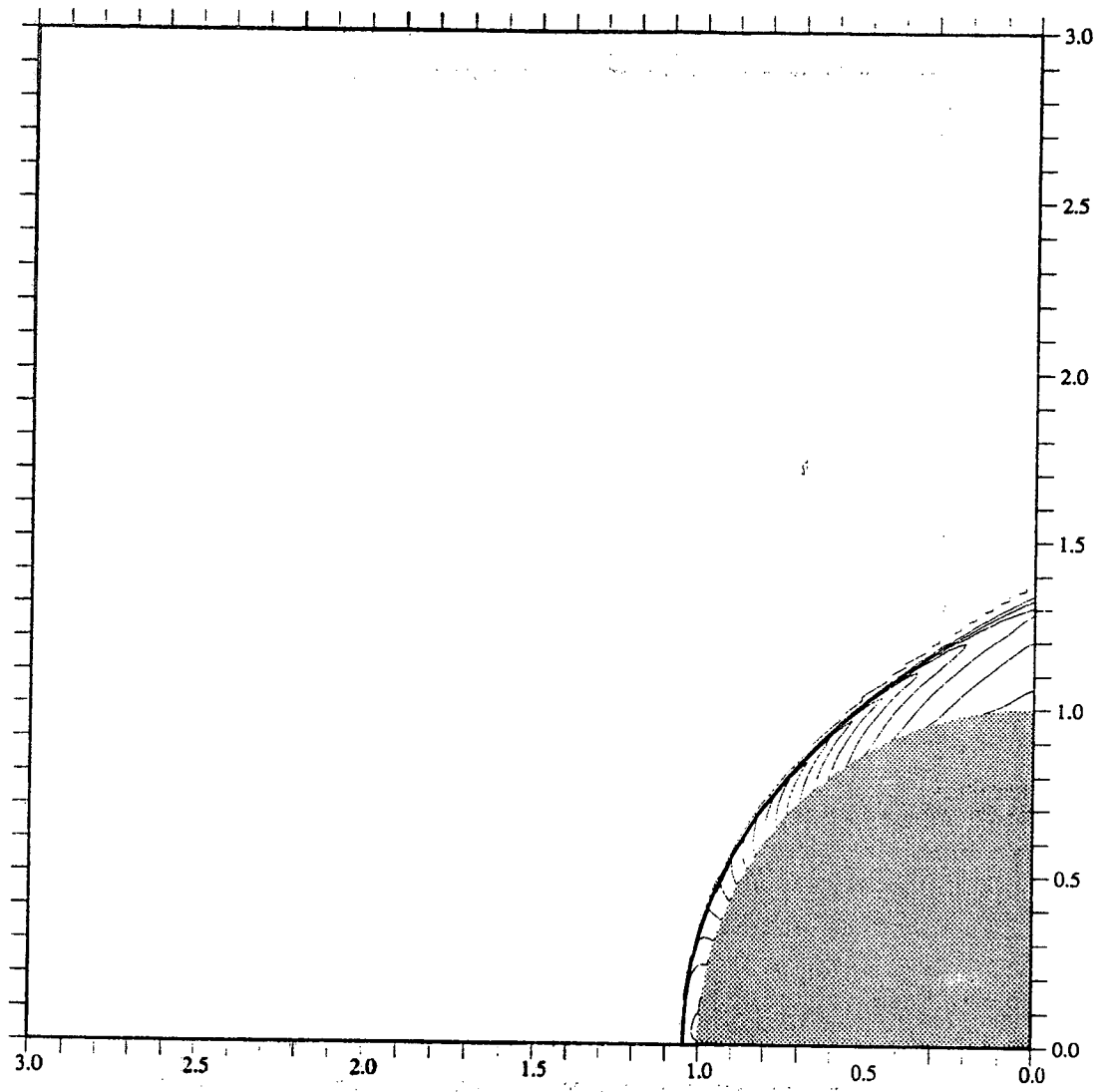


figure 10.b
 Ecoulement hypersonique d'un gaz réactif sur une sphère
 lignes iso-température ($M_\infty = 25$)



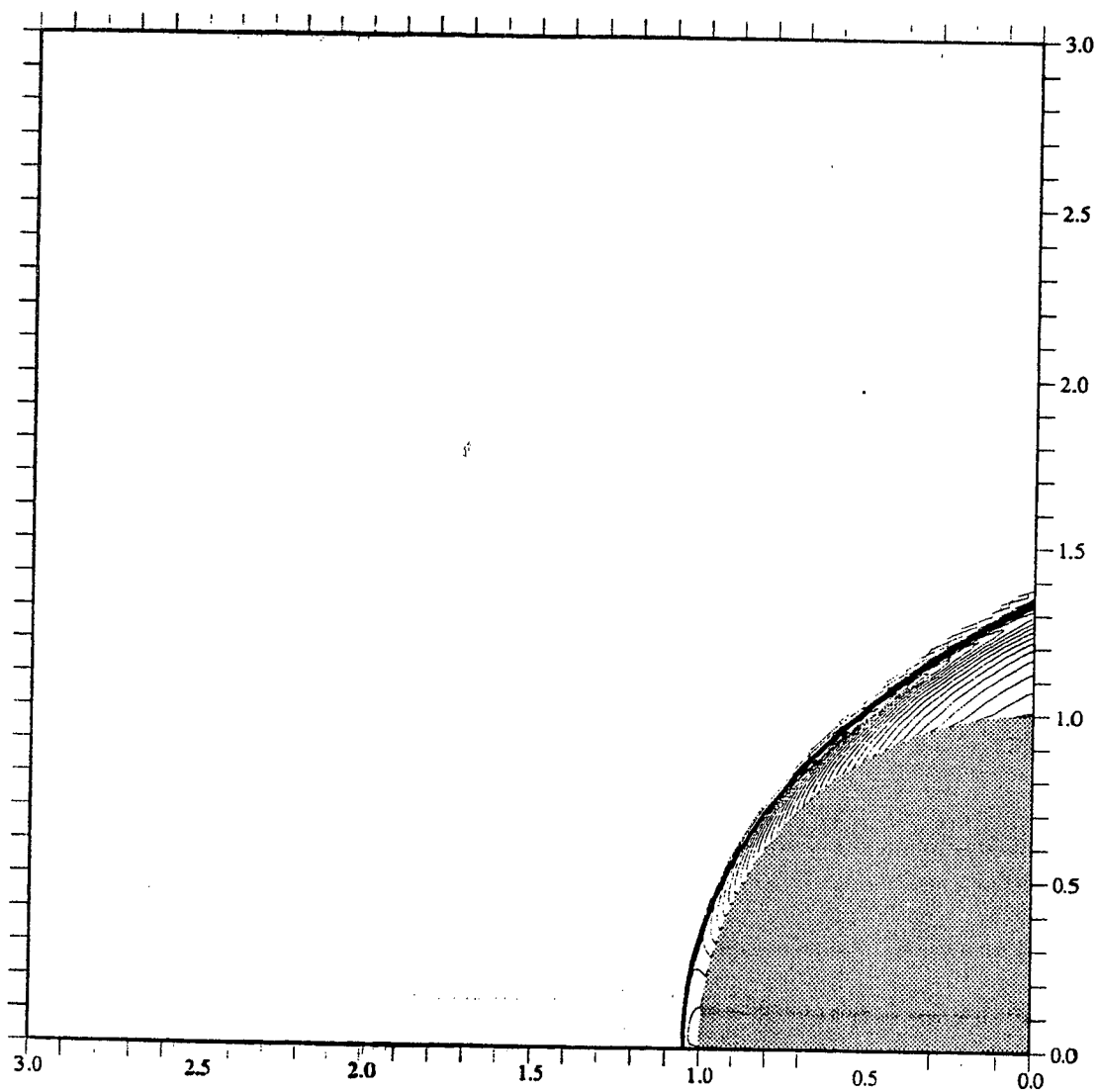
Temperature inf 232.1 K
 Temperature max 6430.5 K

figure 10.c
Ecoulement hypersonique d'un gaz réactif sur une sphère
lignes iso-pression ($M_\infty = 25$)



Kp min -0.000
 Kp max 1.946

figure 10.d
Ecoulement hypersonique d'un gaz réactif sur une sphère
lignes iso-densité ($M_\infty = 25$)



Density min 0.814
Density max 17.972

figure 10.e
 Ecoulement hypersonique d'un gaz réactif sur une sphère
 Coupes de nombre de Mach et de température ($M_\infty = 25$)

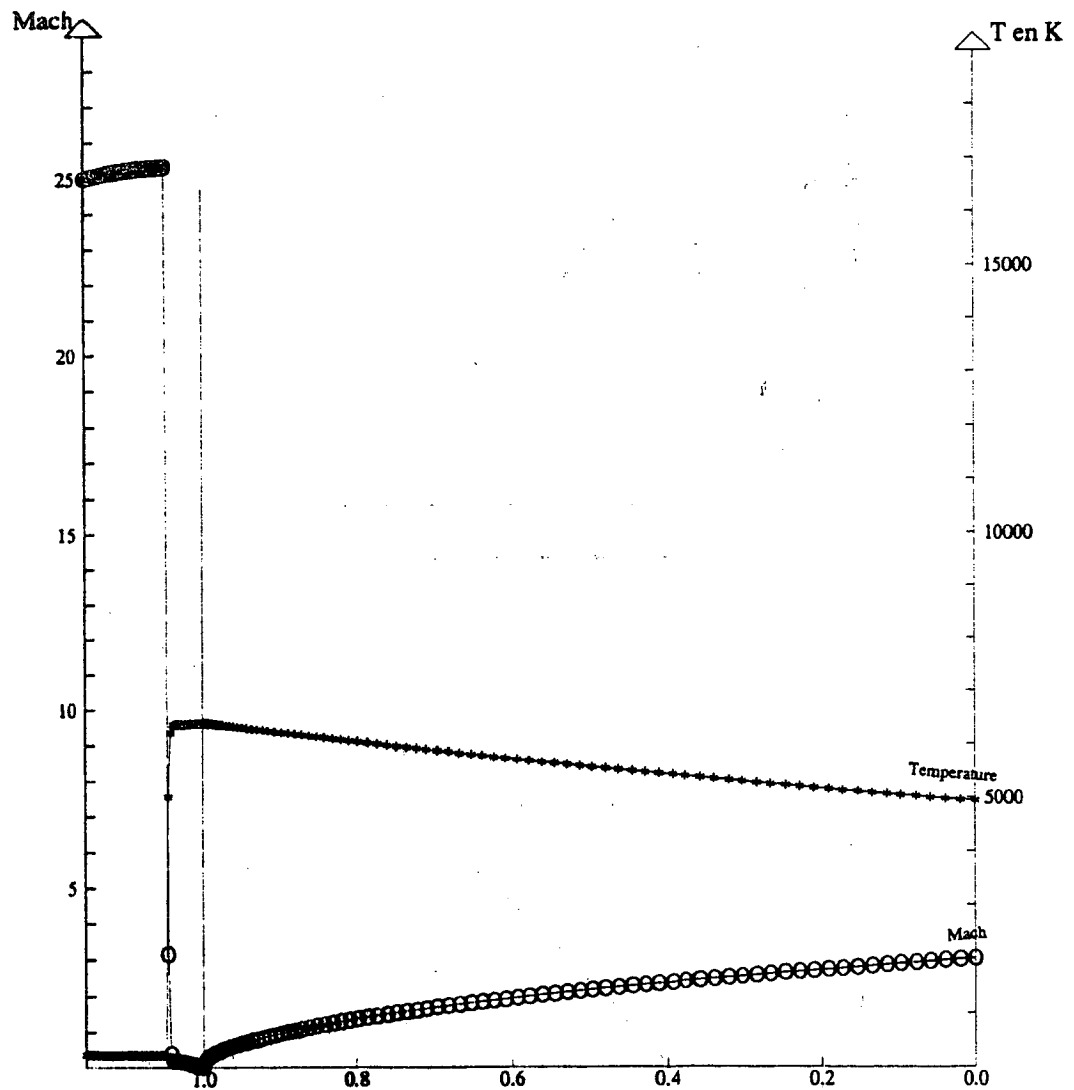


figure 10.f
Ecoulement hypersonique d'un gaz réactif sur une sphère
Coupes de fractions massiques ($M_\infty = 25$)

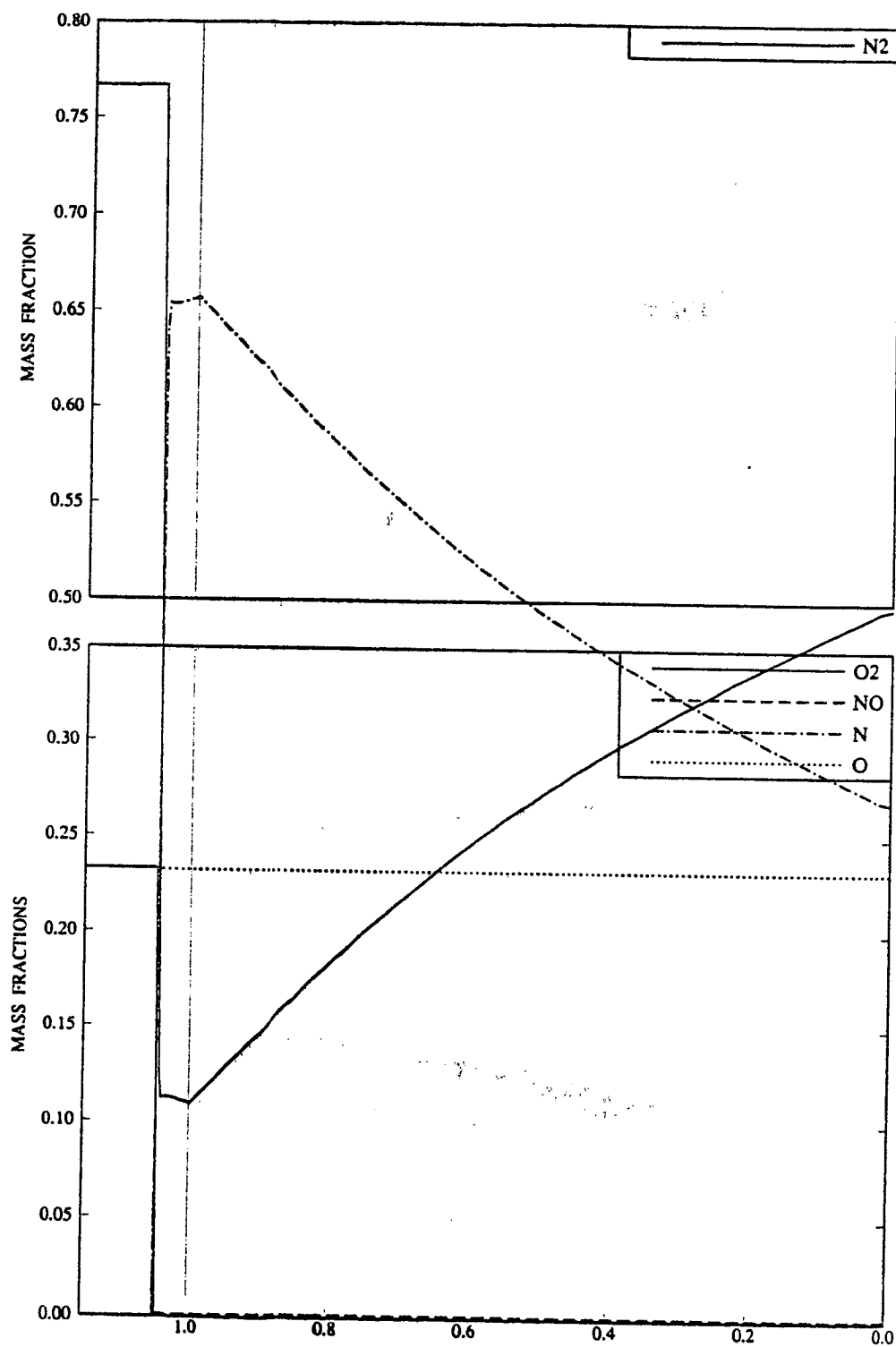
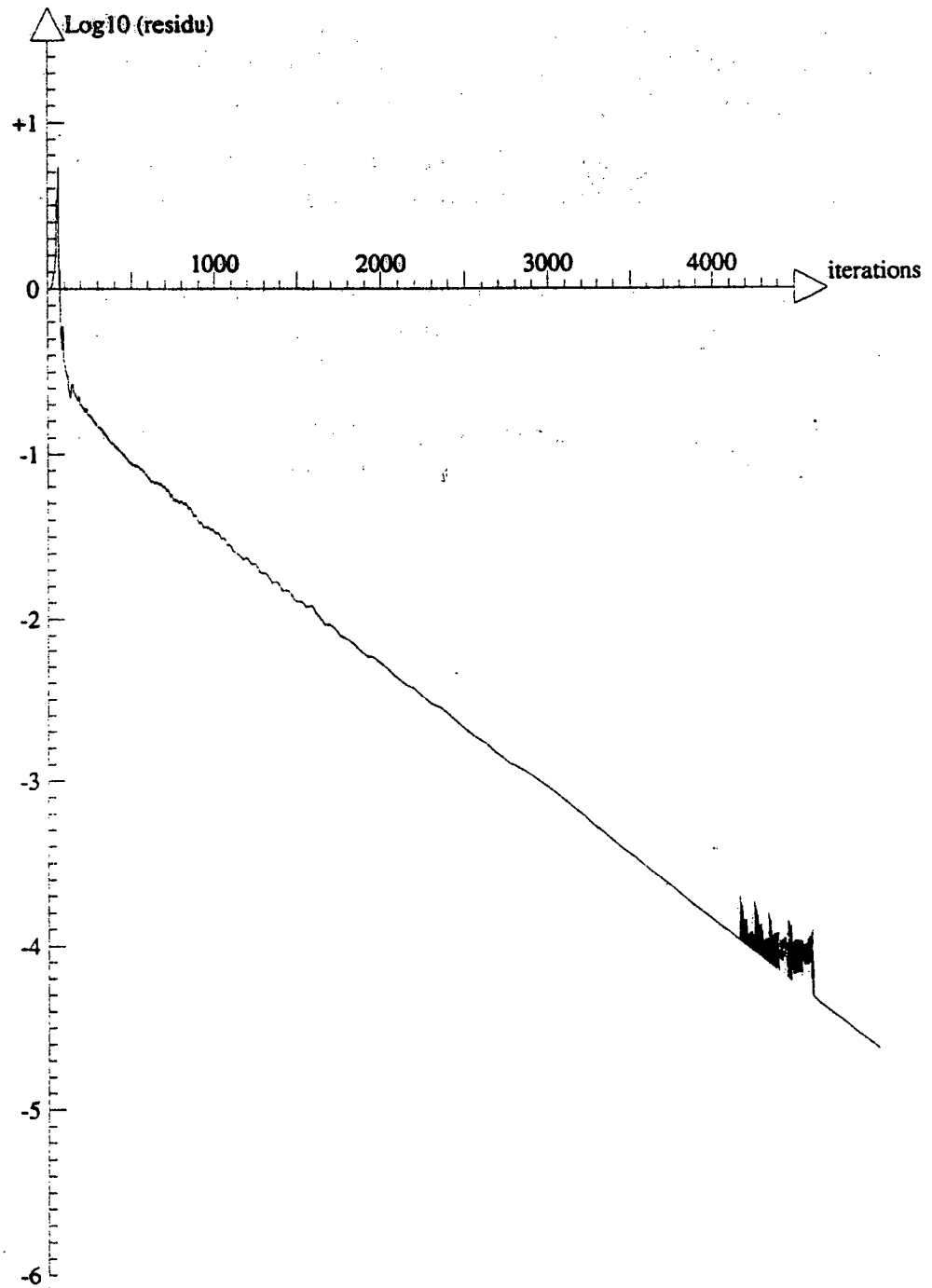


figure 10.g
Ecoulement hypersonique d'un gaz réactif sur une sphère
Convergence itérative , $CFL = 0.4$



V. CONCLUSION

L'étude entreprise nous a conduit à la construction d'un schéma d'ordre 1 de type Volumes Finis pour les équations d'EULER en axisymétrique qui résulte d'une approximation Volumes-Finis conservative 3-D.

Nous avons alors développé un code qui comparé à la version 2-D , ne nécessite qu'un surplus de 10% de temps calcul , et qui s'est révélé adapté aux captures de choc .

Malgré la robustesse du code , il reste cependant à résoudre efficacement un problème de non-respect de la monotonie de la solution dans le voisinage de l'axe de symétrie .

Remarquons pour terminer qu'une extension aux maillages non structurés peut être envisagée sans difficulté particulière de formulation.

VI. REFERENCES

- [1] J-A. Désidéri , A. Dervieux , "Compressible Flow Solvers Using Unstructured Grids " , Von Karman Institut For Fluid Dynamics , Lecture Series 1988-05 , Computational Fluid Dynamics , March 7-11 , 1988 .
- [2] J-A. Désidéri , E. Hettena , "Numerical Simulation of Hypersonic Equilibrium-Air Reactive Flow " , INRIA rapports de recherche num.716 , Aout 1987 .
- [3] J-A. Désidéri , N. Glinsky , E. Hettena , "Hypersonic Reactive Flow Computations" , Computers and Fluids , to appear .

VII. ANNEXE

calcul de la mesure d'une cellule dans la méthode de perturbation de domaine

Soit \mathcal{P} le demi-plan (O, \vec{i}, \vec{j}_+) , c'est à dire :

$$\mathcal{P} = \{M(x, y, 0) \in E^3 \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+\}$$

Soit $m \in \mathcal{P}$ et \mathcal{D}_m la cellule de m . Soit $\mathcal{C}_m = \mathcal{D}_m \cap \mathcal{P}$, on sait que \mathcal{D}_m est le perturbé $(\mathcal{C}_m)_\epsilon$ de \mathcal{C}_m où ϵ tend vers zéro.

Déterminons d'abord le volume \mathcal{V} de \mathcal{D}_m .

En coordonnées cylindriques (x, y, ϕ) , on a :

$$d\mathcal{V} = y dx dy d\phi$$

ainsi

$$\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}_m} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}_m} y dx dy d\phi$$

d'où

$$\mathcal{V} = 2\epsilon \int_{\mathcal{C}_m} y dx dy$$

D'après la formule de Green on a

$$\int_{\mathcal{C}_m} y dx dy = - \int_{\partial \mathcal{C}_m} \frac{1}{2} y^2 dx + \int_{\partial \mathcal{C}_m} C_0 dy = - \frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{C}_m} y^2 dx$$

d'où

$$\mathcal{V} = -\epsilon \int_{\partial \mathcal{C}_m} y^2 dx$$

On évalue alors la mesure $mes(\mathcal{C}_m)$ par :

$$mes(\mathcal{C}_m) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{\mathcal{D}_m} d\mathcal{V} \right) = - \int_{\partial \mathcal{C}_m} y^2 dx$$

$\partial \mathcal{C}_m$ est parcouru dans le sens positif conventionnel.

Evaluation de $\int_{\partial \mathcal{C}_m} y^2 dx$ pour \mathcal{C}_m polygonal

Si

$$\partial C_m \equiv A_1 A_2 \widehat{\dots} A_N \subset \mathcal{P}$$

alors on a

$$\int_{\partial C_m} y^2 dx = \sum_{\substack{1 \leq i \leq N \\ (N+1 \equiv 1)}} \left(\int_{A_i A_{i+1}} y^2 dx \right)$$

Ainsi tout sera terminé si on sait évaluer les $\int_{A_i A_{i+1}} y^2 dx$

Evaluation de $I_{\overrightarrow{AB}} = \int_{AB} y^2 dx$ pour $(A, B) \in \mathcal{P}^2$

Si dans \mathcal{P} , on a $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ alors sur (AB) ,

$$\begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0.$$

On en déduit que

$$I_{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{3} (y_A^2 + y_B^2 + y_A y_B) (x_B - x_A)$$

d'où

$$\begin{aligned} I_{A_1 A_2 \widehat{\dots} A_N} &= \int_{\partial C_m} y^2 dx \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq N \\ (N+1 \equiv 1)}} I_{\overrightarrow{A_i A_{i+1}}} \end{aligned}$$

avec

$$I_{\overrightarrow{A_i A_{i+1}}} = \frac{1}{3} (y_{A_i}^2 + y_{A_{i+1}}^2 + y_{A_i} y_{A_{i+1}}) (x_{A_{i+1}} - x_{A_i})$$

Expression de la mesure de C_m

On sait que

$$mes(C_m) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{\mathcal{D}_m} dV \right)$$

Ainsi quand $\partial C_m \equiv A_1 A_2 \widehat{\dots} A_N \subset \mathcal{P}$, on a :

$$mes(C_m) = \frac{1}{3} \sum_{\substack{1 \leq i \leq N \\ (N+1 \equiv 1)}} [y_{A_i}^2 + y_{A_{i+1}}^2 + y_{A_i} y_{A_{i+1}}] [x_{A_{i+1}} - x_{A_i}]$$

